Corrigé — Problèmes (équations du 2ème degré)

Ici, tu as les résultats et des explications. Les méthodes varient exprès: c'est comme un menu, à toi de choisir ton plat préféré.

Problème 1 — Rectangle (périmètre + aire)

Modélisation. Soit L la longueur et l la largeur. $L+l=17$ et $Ll=60$. En remplaçant $l=17-L$: $L(17-L)=60$.

Technique A — Discriminant. $L(17-L)=60 \Leftrightarrow -L^2+17L-60=0 \Leftrightarrow L^2-17L+60=0$. $\Delta=17^2-4\cdot60=289-240=49$. Donc $L=(17\pm7)/2 \Rightarrow L=12$ ou $L=5$. Dimensions: 12 cm et 5 cm.

Technique B — Viète / factorisation. On cherche deux nombres de somme 17 et de produit 60: 12 et 5. Donc $(L-12)(L-5)=0$.

Problème 2 — Balle qui touche le sol

Modélisation. La balle touche le sol quand $h(t)=0$: $-5t^2+20t+1=0$.

Technique A — Discriminant. $5t^2-20t-1=0$. $\Delta=(-20)^2-4\cdot5\cdot(-1)=400+20=420$. $t=(20\pm\sqrt{420})/(10)=2\pm\sqrt{105}/5$. Seul le temps positif compte: $t=2+\sqrt{105}/5 \approx 4.05$ s.

Technique B — Complétion du carré. $-5(t^2-4t)-1=0 \Rightarrow -5[(t-2)^2-4]-1=0 \Rightarrow -5(t-2)^2+19=0 \Rightarrow (t-2)^2=19/5 \Rightarrow t=2\pm\sqrt{(19/5)}$.

Problème 3 — Deux entiers consécutifs

Modélisation. $n(n+1)=156 \Leftrightarrow n^2+n-156=0$.

Technique A — Discriminant. $\Delta=1+624=625=25^2$. $n=(-1\pm25)/2 \Rightarrow n=12$ ou $n=-13$. Paires: (12,13) ou (-13,-12).

Technique B — Factorisation. $n^2+n-156=(n-12)(n+13)=0$.

Problème 4 — Carré + bordure

Modélisation. Si x est le côté du carré intérieur, le côté extérieur vaut $x+4$. Aire totale: $(x+4)^2=196$.

Technique A — Racine carrée. $x+4=14$ (longueur positive) $\Rightarrow x=10$ m.

Technique B — Mise sous forme ax^2+bx+c. $(x+4)^2-196=0 \Rightarrow x^2+8x-180=0 \Rightarrow (x-10)(x+18)=0 \Rightarrow x=10$ m (solution pertinente).

Problème 5 — Somme 13, produit 36

Modélisation. Si le premier nombre est u, l'autre est $13-u$. $u(13-u)=36$.

Technique A — Factorisation. $u(13-u)=36 \Leftrightarrow -u^2+13u-36=0 \Leftrightarrow u^2-13u+36=0 \Leftrightarrow (u-4)(u-9)=0$. Les nombres sont 4 et 9.

Technique B — Viète. Les racines ont somme 13 et produit 36 $\Rightarrow$ 4 et 9.

Problème 6 — Recette de billets

Équation pour 600 CHF. $-2x^2+80x=600 \Leftrightarrow x^2-40x+300=0$.

Technique A — Discriminant. $\Delta=40^2-4\cdot 300=1600-1200=400$. $x=(40\pm 20)/2 \Rightarrow x=10$ ou $x=30$ billets.

Technique B — Complétion du carré. $x^2-40x+300=0 \Leftrightarrow (x-20)^2-100=0 \Leftrightarrow (x-20)^2=100 \Rightarrow x=20\pm 10 \Rightarrow 10$ ou 30.

Bonus (max). $R(x)=-2(x-20)^2+800 \Rightarrow$ recette maximale 800 CHF pour $x=20$.

Problème 7 — Triangle rectangle

Modélisation (Pythagore). $x^2+(x+3)^2=15^2=225 \Rightarrow 2x^2+6x-216=0 \Rightarrow x^2+3x-108=0$.

Technique A — Factorisation. $x^2+3x-108=(x-9)(x+12)=0 \Rightarrow x=9$ (longueur positive).

Technique B — Discriminant. $\Delta=3^2+432=441=21^2 \Rightarrow x=(-3\pm 21)/2 \Rightarrow 9$ ou $-12 \Rightarrow$ on garde 9.

Problème 8 — Aire d’un rectangle $(x+2)(x-1)=48$

Modélisation. $(x+2)(x-1)=48 \Rightarrow x^2+x-2=48 \Rightarrow x^2+x-50=0$.

Technique A — Discriminant. $\Delta=1+200=201$. $x=(-1\pm\sqrt{201})/2$. Comme $x-1>0$, on garde $x=(-1+\sqrt{201})/2 \approx 6.59$.

Technique B — Formule générale / approximation. Même résultat; on peut estimer $\sqrt{201}\approx 14.18$, donc $x\approx(-1+14.18)/2\approx 6.59$.

Problème 9 — Affiche 1200 cm², largeur 10 cm de moins

Modélisation. Hauteur h, largeur $h-10$. Aire: $h(h-10)=1200 \Rightarrow h^2-10h-1200=0$.

Technique A — Discriminant. $\Delta=100+4800=4900=70^2$. $h=(10\pm 70)/2 \Rightarrow h=40$ ou $h=-30$. Dimensions: hauteur 40 cm, largeur 30 cm.

Technique B — Factorisation. $h^2-10h-1200=(h-40)(h+30)=0$.

Problème 10 — Somme de deux carrés consécutifs

Modélisation. $n^2+(n+1)^2=365 \Rightarrow 2n^2+2n-364=0 \Rightarrow n^2+n-182=0$.

Technique A — Discriminant. $\Delta=1+728=729=27^2$. $n=(-1\pm 27)/2 \Rightarrow n=13$ ou $n=-14$. Donc $(13,14)$ ou $(-14,-13)$.

Technique B — Factorisation. $n^2+n-182=(n-13)(n+14)=0$.