

Corrigé détaillé – Série 3.

Exercice 1

Valeurs exactes des angles particuliers

Triangle équilatéral de côté 2, coupé par la hauteur : on obtient un triangle rectangle avec hypoténuse = 2, côté court = 1, côté long = $\sqrt{3}$.

a) 30° : $\sin(30^\circ) = 1/2$, $\cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2$, $\tan(30^\circ) = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$

b) 45° : carré de côté 1, diagonale = $\sqrt{2}$. $\sin(45^\circ) = \sqrt{2}/2$, $\cos(45^\circ) = \sqrt{2}/2$, $\tan(45^\circ) = 1$

c) 60° : même triangle qu'en a) mais vu de l'autre angle. $\sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2$, $\cos(60^\circ) = 1/2$, $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
30°	$1/2 = 0,500$	$\sqrt{3}/2 \approx 0,866$	$\sqrt{3}/3 \approx 0,577$
45°	$\sqrt{2}/2 \approx 0,707$	$\sqrt{2}/2 \approx 0,707$	1
60°	$\sqrt{3}/2 \approx 0,866$	$1/2 = 0,500$	$\sqrt{3} \approx 1,732$

Exercice 2

Preuve de $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Dans le triangle ABC rectangle en C, avec $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$:

$\sin(\alpha) = a/c$ et $\cos(\alpha) = b/c$

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = a^2/c^2 + b^2/c^2 = (a^2 + b^2)/c^2$

Par le théorème de Pythagore : $a^2 + b^2 = c^2$

Donc : $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = c^2/c^2 = 1$ ■

Exercice 3

$\cos(\alpha) = 4/5$

a) $\cos^2(\alpha) = 16/25$. $\sin^2(\alpha) = 1 - 16/25 = 9/25$. $\sin(\alpha) = 3/5 = 0,6$

b) $\tan(\alpha) = \sin(\alpha)/\cos(\alpha) = (3/5)/(4/5) = 3/4 = 0,75$

c) $1 + \tan^2(\alpha) = 1 + 9/16 = 25/16$

$1/\cos^2(\alpha) = 1/(16/25) = 25/16 \Rightarrow$ Égalité vérifiée ✓

Exercice 4

$\alpha = 30^\circ$, $c = 10$ cm

$\beta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$a = c \times \sin(30^\circ) = 10 \times 1/2 = 5$ cm

$b = c \times \cos(30^\circ) = 10 \times \sqrt{3}/2 = 5\sqrt{3} \approx 8,66$ cm

Aire = $a \times b / 2 = 5 \times 5\sqrt{3} / 2 = 25\sqrt{3}/2 \approx 21,65$ cm²

Exercice 5

Voûte d'un tunnel : angle 230° , base = 11 m

La corde (base) soutient un angle de 230° au centre. Demi-angle = 115° .

Formule corde : corde = $2r \times \sin(\text{angle}/2) \Rightarrow 11 = 2r \times \sin(115^\circ)$

$r = 11 / (2 \times \sin(115^\circ)) = 11 / (2 \times 0,9063) \approx 6,07$ m

Distance du centre à la corde : $d = \sqrt{(r^2 - (11/2)^2)} = \sqrt{(36,84 - 30,25)} = \sqrt{6,59} \approx 2,57$ m

L'arc est $> 180^\circ \Rightarrow$ le centre est en dessous de la corde.

Hauteur max = $r - d = 6,07 - 2,57 = 3,50$ m (point le plus haut de la voûte au-dessus du sol)

Exercice 6

Hexagone régulier inscrit dans un cercle de $R = 1$ dm

Propriété remarquable : pour un hexagone régulier, côté $s = R = 1$ dm.

a) Côté $s = R = 1$ dm (= 10 cm)

b) Périmètre = $6 \times s = 6$ dm (= 60 cm)

c) Aire = $6 \times$ (aire d'un triangle équilatéral de côté R)
= $6 \times (\sqrt{3}/4 \times R^2) = 6 \times \sqrt{3}/4 \times 1 = 3\sqrt{3}/2 \approx 2,598$ dm²

Exercice 7

Élastique : AC = 10 cm, longueur finale = 16 cm

Chaque brin AB = BC = 8 cm. La distance horizontale de A (ou C) à B = 5 cm.

a) Descente de B : $h = \sqrt{(8^2 - 5^2)} = \sqrt{(64 - 25)} = \sqrt{39} \approx 6,24$ cm

b) Angle $\angle ABC$ entre les deux brins : $\cos(\angle ABC) = (h^2 - 25) / 64$
= $(39 - 25)/64 = 14/64 \approx 0,2188$

$\angle ABC = \arccos(0,2188) \approx 77,4^\circ$

Exercice 8

Distance Lausanne-équateur : $46^\circ 31' N$

$46^\circ 31' = 46 + 31/60 \approx 46,5167^\circ$

En radians : $46,5167 \times \pi/180 \approx 0,8118$ rad

Distance = $R \times \alpha = 6'370 \times 0,8118 \approx 5'171$ km

Exercice 9

Silo : diamètre 12 m, angle 11°

Rayon $r = 6$ m. Angle de demi-vision = $5,5^\circ$.

Les tangentes forment un triangle rectangle : $\sin(5,5^\circ) = r / D$ ($D =$ dist. au centre)

$D = r / \sin(5,5^\circ) = 6 / 0,09585 \approx 62,60$ m

Distance au point le plus proche = $D - r = 62,60 - 6 \approx 56,60$ m

Exercice 10

Synthèse : $\sin(\alpha) = 0,6$

a) $\cos(\alpha) = \sqrt{(1 - 0,36)} = \sqrt{0,64} = 0,8$

b) $\tan(\alpha) = 0,6/0,8 = 0,75$

c) $\sin/\cos = 0,6/0,8 = 0,75 = \tan(\alpha) \checkmark$

d) $1 + \tan^2(\alpha) = 1 + 0,5625 = 1,5625$

$1/\cos^2(\alpha) = 1/0,64 = 1,5625 \Rightarrow$ Relation vérifiée \checkmark