

Systèmes d'inéquations linéaires

Série 2/4 — Introduction à la programmation linéaire — Corrigé détaillé (version adulte)

Exercice 1

Énoncé : $\{ x + y \leq 4 ; x - y \leq 2 \}$ Le point $P(1 ; 1)$ appartient-il à R ?

- Droites frontières : $y = -x + 4$ ($m = -1, h = 4$) et $y = x - 2$ ($m = 1, h = -2$), toutes deux en trait plein.
- Test de l'origine dans chaque inéquation : $0 + 0 = 0 \leq 4$ (vrai) et $0 - 0 = 0 \leq 2$ (vrai) $\rightarrow$ l'origine appartient à R .
- Vérification de $P(1 ; 1)$: $1 + 1 = 2 \leq 4$ vrai ; $1 - 1 = 0 \leq 2$ vrai $\rightarrow P$ appartient à R .

Exercice 2

Énoncé : $\{ 2x - y \leq 4 ; x + 2y \leq 6 \}$ Le point $P(3 ; 2)$ appartient-il à R ?

- Droites frontières : $y = 2x - 4$ ($m = 2, h = -4$) et $y = -(1/2)x + 3$ ($m = -1/2, h = 3$), trait plein.
- Test de l'origine : $2 \cdot 0 - 0 = 0 \leq 4$ vrai ; $0 + 2 \cdot 0 = 0 \leq 6$ vrai $\rightarrow$ l'origine appartient à R .
- Vérification de $P(3 ; 2)$: $2 \cdot 3 - 2 = 4 \leq 4$ vrai (P est sur la 1^{re} frontière) ; $3 + 2 \cdot 2 = 7 \leq 6$ FAUX $\rightarrow P$ n'appartient pas à R .

Exercice 3

Énoncé : $\{ x - 2y > -4 ; 3x + y < 9 \}$ Le point $P(0 ; 0)$ appartient-il à R ?

- Droites frontières : $y = (1/2)x + 2$ ($m = 1/2, h = 2$) et $y = -3x + 9$ ($m = -3, h = 9$), toutes deux en pointillés.
- Vérification directe de $P(0 ; 0)$: $0 - 0 = 0 > -4$ vrai ; $3 \cdot 0 + 0 = 0 < 9$ vrai $\rightarrow$ les deux inéquations sont satisfaites.
- P appartient à R (et comme P est l'origine, R est justement le demi-plan qui contient l'origine pour chaque droite).

Exercice 4

Énoncé : $\{ x + y \geq 3 ; 2x - y \leq 4 \}$ Le point $P(2 ; 2)$ appartient-il à R ?

- Droites frontières : $y = -x + 3$ ($m = -1, h = 3$) et $y = 2x - 4$ ($m = 2, h = -4$), trait plein.
- Test de l'origine : $0 + 0 = 0 \geq 3$ FAUX $\rightarrow$ pour la 1^{re} inéquation, R est du côté opposé à l'origine. Pour la 2^e : $0 \leq 4$ vrai $\rightarrow$ côté de l'origine.
- Vérification de $P(2 ; 2)$: $2 + 2 = 4 \geq 3$ vrai ; $2 \cdot 2 - 2 = 2 \leq 4$ vrai $\rightarrow P$ appartient à R .

Exercice 5

Énoncé : $\{ y \leq 2x + 1 ; y \geq -x + 3 \}$ Le point $P(2 ; 3)$ appartient-il à R ?

- Droites frontières déjà sous forme $y = mx + h$: $y = 2x + 1$ ($m = 2$, $h = 1$) et $y = -x + 3$ ($m = -1$, $h = 3$), trait plein.
- Vérification de $P(2 ; 3)$: $3 \leq 2 \cdot 2 + 1 = 5$, vrai ; $3 \geq -2 + 3 = 1$, vrai $\rightarrow$ les deux conditions sont satisfaites.
- P appartient à R.

Exercice 6

Énoncé : $\{ 3x - y \leq 6 ; x + 4y \leq 16 \}$ Le point $P(4 ; 2)$ appartient-il à R ?

- Droites frontières : $y = 3x - 6$ ($m = 3$, $h = -6$) et $y = -(1/4)x + 4$ ($m = -1/4$, $h = 4$), trait plein.
- Test de l'origine : $0 \leq 6$ vrai ; $0 \leq 16$ vrai $\rightarrow$ l'origine appartient à R.
- Vérification de $P(4 ; 2)$: $3 \cdot 4 - 2 = 10 \leq 6$ FAUX $\rightarrow$ P n'appartient pas à R (la 1^{re} contrainte n'est pas respectée).

Exercice 7

Énoncé : $\{ 2x + y > 2 ; x - 3y < 6 \}$ Le point $P(1 ; 1)$ appartient-il à R ?

- Droites frontières : $y = -2x + 2$ ($m = -2$, $h = 2$) et $y = (1/3)x - 2$ ($m = 1/3$, $h = -2$), pointillés.
- Vérification de $P(1 ; 1)$: $2 \cdot 1 + 1 = 3 > 2$ vrai ; $1 - 3 \cdot 1 = -2 < 6$ vrai $\rightarrow$ les deux inéquations sont satisfaites.
- P appartient à R.

Exercice 8

Énoncé : $\{ x + 3y \leq 9 ; 2x - y \geq -2 \}$ Le point $P(3 ; 1)$ appartient-il à R ?

- Droites frontières : $y = -(1/3)x + 3$ ($m = -1/3$, $h = 3$) et $y = 2x + 2$ ($m = 2$, $h = 2$), trait plein.
- Test de l'origine : $0 \leq 9$ vrai ; $0 \geq -2$ vrai $\rightarrow$ l'origine appartient à R.
- Vérification de $P(3 ; 1)$: $3 + 3 \cdot 1 = 6 \leq 9$ vrai ; $2 \cdot 3 - 1 = 5 \geq -2$ vrai $\rightarrow$ P appartient à R.

Exercice 9

Énoncé : $\{ 4x + 2y \leq 20 ; x + 3y \leq 15 \}$ Le point $P(2 ; 4)$ appartient-il à R ?

- Droites frontières : $y = -2x + 10$ ($m = -2$, $h = 10$) et $y = -(1/3)x + 5$ ($m = -1/3$, $h = 5$), trait plein.
- Test de l'origine : $0 \leq 20$ vrai ; $0 \leq 15$ vrai $\rightarrow$ l'origine appartient à R.
- Vérification de $P(2 ; 4)$: $4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 16 \leq 20$ vrai ; $2 + 3 \cdot 4 = 14 \leq 15$ vrai $\rightarrow$ P appartient à R.

Exercice 10

Énoncé : $\{ x - y \leq 3 ; 2x + y \geq 4 ; y \leq 5 \}$ Le point $P(3 ; 2)$ appartient-il à R ?

- Droites frontières : $y = x - 3$ ($m = 1, h = -3$) ; $y = -2x + 4$ ($m = -2, h = 4$) ; $y = 5$ (horizontale). Toutes en trait plein.
- Vérification de $P(3 ; 2)$: $3 - 2 = 1 \leq 3$ vrai ; $2 \cdot 3 + 2 = 8 \geq 4$ vrai ; $2 \leq 5$ vrai $\rightarrow$ les trois conditions sont satisfaites.
- P appartient à R .