

Mise en situation — systèmes de contraintes

Série 3/4 — Introduction à la programmation linéaire — Corrigé détaillé (version adulte)

Exercice 1

Énoncé : Un artisan savonnier fabrique des savons et des bougies. Un savon nécessite 0,5 h de travail et 2 kg de matière première ; une bougie nécessite 1 h de travail et 1 kg de matière première. L'artisan ne travaille pas plus de 10 h par jour et ne dispose pas de plus de 30 kg de matière première par jour. On note x le nombre de savons et y le nombre de bougies produits par jour. Le point $P(8 ; 5)$ vérifie-t-il le système ?

- x = nombre de savons, y = nombre de bougies produits par jour.
- Temps : $0,5x + y \leq 10$, soit $x + 2y \leq 20$. Matière première : $2x + y \leq 30$.
- Système : $\{ x + 2y \leq 20 ; 2x + y \leq 30 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$.
- Vérification de $P(8 ; 5)$: $8 + 2 \cdot 5 = 18 \leq 20$ vrai ; $2 \cdot 8 + 5 = 21 \leq 30$ vrai ; $x, y \geq 0$ vrai $\rightarrow P$ appartient à R .

Exercice 2

Énoncé : Le comité d'organisation d'une kermesse prévoit 220 personnes. Chaque personne doit disposer de 2 assiettes, 3 verres et 5 serviettes. Un magasin propose un lot C (40 assiettes, 60 verres, 50 serviettes) et un lot D (60 assiettes, 30 verres, 80 serviettes). On note x le nombre de lots C et y le nombre de lots D commandés. Le point $P(3 ; 7)$ vérifie-t-il le système ?

- x = nombre de lots C, y = nombre de lots D.
- Besoins totaux : $220 \times 2 = 440$ assiettes, $220 \times 3 = 660$ verres, $220 \times 5 = 1100$ serviettes.
- Assiettes : $40x + 60y \geq 440$, soit $2x + 3y \geq 22$. Verres : $60x + 30y \geq 660$, soit $2x + y \geq 22$. Serviettes : $50x + 80y \geq 1100$, soit $5x + 8y \geq 110$.
- Système : $\{ 2x + 3y \geq 22 ; 2x + y \geq 22 ; 5x + 8y \geq 110 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$.
- Vérification de $P(3 ; 7)$: $2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 27 \geq 22$ vrai ; $2 \cdot 3 + 7 = 13 \geq 22$ FAUX $\rightarrow P$ n'appartient pas à R (pas assez de verres avec cette combinaison).

Exercice 3

Énoncé : Un atelier fabrique des sacs en cuir et des sacs en toile. Le stock de tissu et de cuir permet de produire au maximum 500 sacs par jour (tous types confondus). Le temps de fabrication d'un sac en cuir est le double de celui d'un sac en toile, et si l'atelier ne produisait que des sacs en toile, il pourrait en fabriquer au maximum 800 par jour. Une étude de marché montre qu'on ne peut pas écouler plus de 180 sacs en cuir et 400 sacs en toile par jour. On note x le nombre de sacs en cuir et y le nombre de sacs en toile. Le point $Q(150 ; 300)$ vérifie-t-il le système ?

- x = nombre de sacs en cuir, y = nombre de sacs en toile.

- Stock (nombre total de sacs) : $x + y \leq 500$.
- Temps de fabrication : si un sac en cuir prend un temps T et un sac en toile un temps $T/2$, la capacité s'écrit $2x + y \leq 800$ (cohérent avec 800 sacs en toile max si $x = 0$).
- Marché : $x \leq 180$; $y \leq 400$.
- Système : $\{ x + y \leq 500 ; 2x + y \leq 800 ; x \leq 180 ; y \leq 400 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$.
- Vérification de $Q(150 ; 300)$: $150 + 300 = 450 \leq 500$ vrai ; $2 \cdot 150 + 300 = 600 \leq 800$ vrai ; $150 \leq 180$ vrai ; $300 \leq 400$ vrai $\rightarrow Q$ appartient à R .

Exercice 4

Énoncé : Un ébéniste fabrique des bureaux et des étagères en bois de chêne et de pin. Un bureau nécessite 6 m² de chêne et 2 m² de pin ; une étagère nécessite 3 m² de chêne et 3 m² de pin. L'ébéniste dispose de 240 m² de chêne et 140 m² de pin par mois. On note x le nombre de bureaux et y le nombre d'étagères produits. Le point $R(20 ; 20)$ vérifie-t-il le système ?

- x = nombre de bureaux, y = nombre d'étagères.
- Chêne : $6x + 3y \leq 240$, soit $2x + y \leq 80$. Pin : $2x + 3y \leq 140$.
- Système : $\{ 2x + y \leq 80 ; 2x + 3y \leq 140 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$.
- Vérification de $R(20 ; 20)$: $2 \cdot 20 + 20 = 60 \leq 80$ vrai ; $2 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 100 \leq 140$ vrai $\rightarrow R$ appartient à R (la région).

Exercice 5

Énoncé : Une exploitation apicole produit des pots de miel et des pots de pollen. Un pot de miel nécessite 3 kg de cire et 2 h de main d'œuvre ; un pot de pollen nécessite 1 kg de cire et 3 h de main d'œuvre. L'exploitation dispose de 90 kg de cire et 120 h de main d'œuvre par semaine. On note x le nombre de pots de miel et y le nombre de pots de pollen. Le point $S(20 ; 25)$ vérifie-t-il le système ?

- x = nombre de pots de miel, y = nombre de pots de pollen.
- Cire : $3x + y \leq 90$. Main d'œuvre : $2x + 3y \leq 120$.
- Système : $\{ 3x + y \leq 90 ; 2x + 3y \leq 120 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$.
- Vérification de $S(20 ; 25)$: $3 \cdot 20 + 25 = 85 \leq 90$ vrai ; $2 \cdot 20 + 3 \cdot 25 = 115 \leq 120$ vrai $\rightarrow S$ appartient à R .

Exercice 6

Énoncé : Une société de messagerie livre des colis standards et des colis express avec une camionnette. Un colis standard demande 0,5 h de manutention et pèse 10 kg ; un colis express demande 1 h de manutention et pèse 15 kg. La camionnette dispose de 8 h de manutention et d'une charge utile de 200 kg par jour. On note x le nombre de colis standards et y le nombre de colis express livrés par jour. Le point $T(6 ; 4)$ vérifie-t-il le système ?

- x = nombre de colis standards, y = nombre de colis express.
- Manutention : $0,5x + y \leq 8$, soit $x + 2y \leq 16$. Charge : $10x + 15y \leq 200$, soit $2x + 3y \leq 40$.
- Système : $\{ x + 2y \leq 16 ; 2x + 3y \leq 40 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$.

- Vérification de $T(6 ; 4) : 6 + 2 \cdot 4 = 14 \leq 16$ vrai ; $2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 24 \leq 40$ vrai $\rightarrow T$ appartient à R .

Exercice 7

Énoncé : Un studio photo propose des séances portrait et des séances famille. Une séance portrait dure 0,5 h et utilise 2 tirages ; une séance famille dure 1 h et utilise 5 tirages. Le studio est ouvert 9 h par jour et dispose d'un stock de 50 tirages par jour. On note x le nombre de séances portrait et y le nombre de séances famille par jour. Le point $U(10 ; 4)$ vérifie-t-il le système ?

- x = nombre de séances portrait, y = nombre de séances famille.
- Temps : $0,5x + y \leq 9$, soit $x + 2y \leq 18$. Tirages : $2x + 5y \leq 50$.
- Système : $\{ x + 2y \leq 18 ; 2x + 5y \leq 50 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$.
- Vérification de $U(10 ; 4) : 10 + 2 \cdot 4 = 18 \leq 18$ vrai (P est sur la frontière, donc solution puisque $\leq$) ; $2 \cdot 10 + 5 \cdot 4 = 40 \leq 50$ vrai $\rightarrow U$ appartient à R .

Exercice 8

Énoncé : Un snack-bar prépare des sandwiches et des salades. Un sandwich nécessite 3 unités de farce et 4 min de préparation ; une salade nécessite 2 unités de farce et 5 min de préparation. Le snack-bar dispose de 90 unités de farce et de 160 min de préparation par service. On note x le nombre de sandwiches et y le nombre de salades préparés. Le point $V(20 ; 10)$ vérifie-t-il le système ?

- x = nombre de sandwiches, y = nombre de salades.
- Farce : $3x + 2y \leq 90$. Temps : $4x + 5y \leq 160$.
- Système : $\{ 3x + 2y \leq 90 ; 4x + 5y \leq 160 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$.
- Vérification de $V(20 ; 10) : 3 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 80 \leq 90$ vrai ; $4 \cdot 20 + 5 \cdot 10 = 130 \leq 160$ vrai $\rightarrow V$ appartient à R .

Exercice 9

Énoncé : Une papeterie assemble des carnets et des packs de stylos. Un carnet nécessite 2 feuilles de carton et 3 min d'assemblage ; un pack de stylos nécessite 1 feuille de carton et 2 min d'assemblage. L'atelier dispose de 120 feuilles de carton et de 180 min d'assemblage par jour. On note x le nombre de carnets et y le nombre de packs de stylos. Le point $W(30 ; 40)$ vérifie-t-il le système ?

- x = nombre de carnets, y = nombre de packs de stylos.
- Carton : $2x + y \leq 120$. Assemblage : $3x + 2y \leq 180$.
- Système : $\{ 2x + y \leq 120 ; 3x + 2y \leq 180 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$.
- Vérification de $W(30 ; 40) : 2 \cdot 30 + 40 = 100 \leq 120$ vrai ; $3 \cdot 30 + 2 \cdot 40 = 170 \leq 180$ vrai $\rightarrow W$ appartient à R .

Exercice 10

Énoncé : Un vignoble produit du vin rouge et du vin blanc (en milliers de bouteilles). Le rouge nécessite 3 ha de vigne et 2 mois de cave ; le blanc nécessite 2 ha de vigne et 3 mois de cave. Le domaine dispose de 60 ha de vigne et d'une capacité cumulée de cave de 70 mois. On note x la production de rouge et y la production de blanc (en milliers de bouteilles). Le point $Z(10 ; 15)$ vérifie-t-il le système ?

- x = production de rouge, y = production de blanc (en milliers de bouteilles).
- Vigne : $3x + 2y \leq 60$. Cave : $2x + 3y \leq 70$.
- Système : $\{ 3x + 2y \leq 60 ; 2x + 3y \leq 70 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$.
- Vérification de $Z(10 ; 15)$: $3 \cdot 10 + 2 \cdot 15 = 60 \leq 60$ vrai (frontière incluse) ; $2 \cdot 10 + 3 \cdot 15 = 65 \leq 70$ vrai $\rightarrow Z$ appartient à R.