

Optimisation d'une fonction économique

Série 4/4 — Introduction à la programmation linéaire — Corrigé détaillé (version adulte)

Exercice 1

Énoncé : Un menuisier fabrique des chaises et des tables. Une chaise nécessite 1 h de travail et 2 kg de bois ; une table nécessite 3 h de travail et 3 kg de bois. Il dispose de 30 h de travail et 42 kg de bois par semaine. Le profit est de 20 fr. par chaise et 45 fr. par table. Combien de chaises et de tables doit-il produire pour maximiser son profit ?

- x = nombre de chaises, y = nombre de tables.
- Système : $\{ x + 3y \leq 30 ; 2x + 3y \leq 42 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$. Fonction économique : $f(x ; y) = 20x + 45y$.
- Sommets de R : $(0 ; 0)$, $(21 ; 0)$, $(0 ; 10)$ et l'intersection des deux droites.
- Intersection de $x + 3y = 30$ et $2x + 3y = 42$: en soustrayant, $x = 12$, puis $y = (30 - 12)/3 = 6 \rightarrow (12 ; 6)$.
- Évaluation de f : $f(0;0)=0$; $f(21;0)=420$; $f(0;10)=450$; $f(12;6) = 20 \cdot 12 + 45 \cdot 6 = 240 + 270 = 510$.
- Le maximum est atteint en $(12 ; 6)$. Le menuisier doit produire 12 chaises et 6 tables pour un profit maximal de 510 fr.

Exercice 2

Énoncé : Une pâtisserie fabrique des croissants et des pains au chocolat. Un croissant nécessite 0,3 kg de farine et 0,2 kg de beurre ; un pain au chocolat nécessite 0,4 kg de farine et 0,1 kg de beurre. Elle dispose de 24 kg de farine et de 11 kg de beurre par jour. Le profit est de 0,90 fr. par croissant et 0,60 fr. par pain au chocolat. Combien de croissants et de pains au chocolat faut-il produire pour maximiser le profit ?

- x = nombre de croissants, y = nombre de pains au chocolat.
- Système : $\{ 3x + 4y \leq 240 ; 2x + y \leq 110 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$ (coefficients multipliés par 10). Fonction économique : $f(x ; y) = 0,9x + 0,6y$.
- Sommets de R : $(0 ; 0)$, $(55 ; 0)$, $(0 ; 60)$ et l'intersection des deux droites.
- Intersection : $2x + y = 110 \rightarrow y = 110 - 2x$. Dans $3x + 4y = 240$: $3x + 4(110 - 2x) = 240 \rightarrow 3x + 440 - 8x = 240 \rightarrow -5x = -200 \rightarrow x = 40$, $y = 30 \rightarrow (40 ; 30)$.
- Évaluation de f : $f(55;0)=49,5$; $f(0;60)=36$; $f(40;30) = 0,9 \cdot 40 + 0,6 \cdot 30 = 36 + 18 = 54$.
- Le maximum est atteint en $(40 ; 30)$. Il faut produire 40 croissants et 30 pains au chocolat pour un profit maximal de 54 fr.

Exercice 3

Énoncé : Une petite commune veut acquérir des minibus et des cars pour son réseau scolaire. Le budget d'achat est de 180'000 fr. au maximum (minibus : 15'000 fr., car : 45'000 fr.) et le budget d'entretien est de 1'000 fr. par mois au maximum (minibus : 100

fr., car : 200 fr.). Un minibus transporte 12 passagers, un car 50 passagers. Combien de minibus et de cars faut-il acheter pour maximiser la capacité totale de transport ?

- x = nombre de minibus, y = nombre de cars.
- Budget : $15000x + 45000y \leq 180000$, soit $x + 3y \leq 12$. Entretien : $100x + 200y \leq 1000$, soit $x + 2y \leq 10$.
- Système : $\{ x + 3y \leq 12 ; x + 2y \leq 10 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$. Fonction économique : $f(x ; y) = 12x + 50y$.
- Sommets de R : (0 ; 0), (10 ; 0), (0 ; 4) et l'intersection des deux droites en (6 ; 2) (on résout $x + 3y = 12$ et $x + 2y = 10$: en soustrayant, $y = 2$, puis $x = 6$).
- Évaluation de f : $f(10;0)=120$; $f(6;2) = 12 \cdot 6 + 50 \cdot 2 = 72 + 100 = 172$; $f(0;4) = 50 \cdot 4 = 200$.
- Le maximum est atteint en (0 ; 4) : c'est un sommet du polygone, même s'il n'est pas l'intersection des deux droites obliques ! La commune a intérêt à n'acheter que des cars : 0 minibus et 4 cars, pour une capacité maximale de 200 passagers.

Exercice 4

Énoncé : Une imprimerie produit des cartes de visite et des affiches. Une carte demande 2 min de temps machine et 3 ml d'encre ; une affiche demande 5 min de temps machine et 4 ml d'encre. L'imprimerie dispose de 360 min de temps machine et 400 ml d'encre par jour. Le profit est de 0,60 fr. par carte et 1,20 fr. par affiche. Combien de cartes et d'affiches faut-il produire pour maximiser le profit ?

- x = nombre de cartes, y = nombre d'affiches.
- Système : $\{ 2x + 5y \leq 360 ; 3x + 4y \leq 400 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$. Fonction économique : $f(x ; y) = 0,6x + 1,2y$.
- Sommets de R : (0 ; 0), (0 ; 72) et l'intersection des deux droites (le sommet sur l'axe des x n'est pas entier : $x = 400/3 \approx 133,3$).
- Intersection : $2x + 5y = 360$ et $3x + 4y = 400$. En multipliant par 3 et 2 : $6x + 15y = 1080$ et $6x + 8y = 800$; en soustrayant : $7y = 280 \rightarrow y = 40$, puis $x = (360 - 200)/2 = 80 \rightarrow (80 ; 40)$.
- Évaluation de f : $f(133,3;0) \approx 80$; $f(80;40) = 0,6 \cdot 80 + 1,2 \cdot 40 = 48 + 48 = 96$; $f(0;72) = 86,4$.
- Le maximum est atteint en (80 ; 40). Il faut produire 80 cartes et 40 affiches pour un profit maximal de 96 fr.

Exercice 5

Énoncé : Une jardinerie vend des sacs de terreau et des sacs d'engrais. Un sac de terreau demande 1 h de manutention et occupe 1 m³ de stockage ; un sac d'engrais demande 0,5 h de manutention et occupe 2 m³ de stockage. La jardinerie dispose de 20 h de manutention et de 35 m³ de stockage par semaine. Le profit est de 8 fr. par sac de terreau et 6 fr. par sac d'engrais. Combien de sacs de chaque type faut-il vendre pour maximiser le profit ?

- x = nombre de sacs de terreau, y = nombre de sacs d'engrais.
- Système : $\{ x + 0,5y \leq 20 ; x + 2y \leq 35 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$. Fonction économique : $f(x ; y) = 8x + 6y$.

- Sommets de R : (0 ; 0), (20 ; 0), (0 ; 17,5) et l'intersection des deux droites.
- Intersection : $x + 0,5y = 20 \rightarrow x = 20 - 0,5y$. Dans $x + 2y = 35 : 20 - 0,5y + 2y = 35 \rightarrow 1,5y = 15 \rightarrow y = 10, x = 15 \rightarrow (15 ; 10)$.
- Évaluation de f : $f(20;0)=160$; $f(15;10) = 8 \cdot 15 + 6 \cdot 10 = 120 + 60 = 180$; $f(0;17,5)=105$.
- Le maximum est atteint en (15 ; 10). Il faut vendre 15 sacs de terreau et 10 sacs d'engrais pour un profit maximal de 180 fr.

Exercice 6

Énoncé : Une diététicienne compose un complément alimentaire à partir de deux produits C et D. Le produit C coûte 1 fr. l'unité et apporte 12 g de protéines et 5 g de glucides ; le produit D coûte 1,50 fr. l'unité et apporte 8 g de protéines et 10 g de glucides. Le complément doit apporter au moins 240 g de protéines et 200 g de glucides. Quelle combinaison minimise le coût ?

- x = nombre d'unités de C, y = nombre d'unités de D.
- Système : $\{ 12x + 8y \geq 240 ; 5x + 10y \geq 200 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$. Fonction économique : $f(x ; y) = x + 1,5y$.
- Sommets de R (région non bornée « au-dessus » des droites) : (40 ; 0), (0 ; 30) et l'intersection des deux droites.
- Intersection : $12x + 8y = 240$, soit $3x + 2y = 60$, et $5x + 10y = 200$, soit $x + 2y = 40$. En soustrayant : $2x = 20 \rightarrow x = 10, y = (40 - 10)/2 = 15 \rightarrow (10 ; 15)$.
- Évaluation de f : $f(40;0)=40$; $f(0;30)=45$; $f(10;15) = 10 + 1,5 \cdot 15 = 10 + 22,5 = 32,5$.
- Le minimum est atteint en (10 ; 15). Il faut combiner 10 unités de C et 15 unités de D pour un coût minimal de 32,50 fr.

Exercice 7

Énoncé : Un transporteur dispose de deux types de camions E et F pour acheminer des marchandises. Un camion E transporte 5 unités de catégorie 1 et 2 unités de catégorie 2, pour un coût de 100 fr. par trajet ; un camion F transporte 4 unités de catégorie 1 et 3 unités de catégorie 2, pour un coût de 90 fr. par trajet. Il faut transporter au moins 170 unités de catégorie 1 et 96 unités de catégorie 2. Combien de trajets de chaque type faut-il prévoir pour minimiser le coût total ?

- x = nombre de trajets en camion E, y = nombre de trajets en camion F.
- Système : $\{ 5x + 4y \geq 170 ; 2x + 3y \geq 96 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$. Fonction économique : $f(x ; y) = 100x + 90y$.
- Sommets de R : (48 ; 0), (0 ; 42,5) et l'intersection des deux droites.
- Intersection : de $5x + 4y = 170$, on tire $y = (170 - 5x)/4$. Dans $2x + 3y = 96 : 8x + 3(170 - 5x) = 384 \rightarrow 8x + 510 - 15x = 384 \rightarrow -7x = -126 \rightarrow x = 18, y = (170 - 90)/4 = 20 \rightarrow (18 ; 20)$.
- Évaluation de f : $f(48;0)=4800$; $f(0;42,5)=3825$; $f(18;20) = 100 \cdot 18 + 90 \cdot 20 = 1800 + 1800 = 3600$.
- Le minimum est atteint en (18 ; 20). Il faut prévoir 18 trajets en camion E et 20 en camion F pour un coût minimal de 3'600 fr.

Exercice 8

Énoncé : Un atelier de bougies fabrique des bougies parfumées et des bougies nature. Une bougie parfumée nécessite 3 unités de temps et 4 unités de cire ; une bougie nature nécessite 2 unités de temps et 5 unités de cire. L'atelier dispose de 96 unités de temps et 156 unités de cire par jour. Le profit est de 4 fr. par bougie parfumée et 3 fr. par bougie nature. Combien de bougies de chaque type faut-il produire pour maximiser le profit ?

- x = nombre de bougies parfumées, y = nombre de bougies nature.
- Système : $\{ 3x + 2y \leq 96 ; 4x + 5y \leq 156 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$. Fonction économique : $f(x ; y) = 4x + 3y$.
- Sommets de R : $(0 ; 0)$, $(32 ; 0)$, $(0 ; 31,2)$ et l'intersection des deux droites.
- Intersection : $3x + 2y = 96$ et $4x + 5y = 156$. En multipliant par 5 et 2 : $15x + 10y = 480$ et $8x + 10y = 312$; en soustrayant : $7x = 168 \rightarrow x = 24$, $y = (96 - 72)/2 = 12 \rightarrow (24 ; 12)$.
- Évaluation de f : $f(32;0)=128$; $f(0;31,2)=93,6$; $f(24;12) = 4 \cdot 24 + 3 \cdot 12 = 96 + 36 = 132$.
- Le maximum est atteint en $(24 ; 12)$. Il faut produire 24 bougies parfumées et 12 bougies nature pour un profit maximal de 132 fr.

Exercice 9

Énoncé : Un atelier de couture confectionne des écharpes et des bonnets. Une écharpe demande 3 h de travail et 4 unités de laine ; un bonnet demande 2 h de travail et 3 unités de laine. L'atelier dispose de 60 h de travail et 84 unités de laine par semaine. Le profit est de 18 fr. par écharpe et 13 fr. par bonnet. Combien d'écharpes et de bonnets faut-il produire pour maximiser le profit ?

- x = nombre d'écharpes, y = nombre de bonnets.
- Système : $\{ 3x + 2y \leq 60 ; 4x + 3y \leq 84 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$. Fonction économique : $f(x ; y) = 18x + 13y$.
- Sommets de R : $(0 ; 0)$, $(20 ; 0)$, $(0 ; 28)$ et l'intersection des deux droites.
- Intersection : $3x + 2y = 60$ et $4x + 3y = 84$. En multipliant par 3 et 2 : $9x + 6y = 180$ et $8x + 6y = 168$; en soustrayant : $x = 12$, $y = (60 - 36)/2 = 12 \rightarrow (12 ; 12)$.
- Évaluation de f : $f(20;0)=360$; $f(0;28)=364$; $f(12;12) = 18 \cdot 12 + 13 \cdot 12 = 216 + 156 = 372$.
- Le maximum est atteint en $(12 ; 12)$. Il faut produire 12 écharpes et 12 bonnets pour un profit maximal de 372 fr.

Exercice 10

Énoncé : Une entreprise de nettoyage compose un mélange à partir d'un désinfectant et d'un dégraissant. Le désinfectant coûte 1 fr. le litre et apporte 2 unités de substance A et 2 unités de substance B ; le dégraissant coûte 1,20 fr. le litre et apporte 1 unité de substance A et 3 unités de substance B. Le mélange doit contenir au moins 30 unités de substance A et 50 unités de substance B. Quel mélange minimise le coût ?

- x = litres de désinfectant, y = litres de dégraissant.
- Système : $\{ 2x + y \geq 30 ; 2x + 3y \geq 50 ; x \geq 0 ; y \geq 0 \}$. Fonction économique : $f(x ; y) = x + 1,2y$.

- Sommets de R : (25 ; 0), (0 ; 30) et l'intersection des deux droites.
- Intersection : en soustrayant $2x + y = 30$ de $2x + 3y = 50$, on obtient $2y = 20 \rightarrow y = 10$, $x = (30 - 10)/2 = 10 \rightarrow (10 ; 10)$.
- Évaluation de f : $f(25;0)=25$; $f(0;30)=36$; $f(10;10) = 10 + 1,2 \cdot 10 = 10 + 12 = 22$.
- Le minimum est atteint en (10 ; 10). Il faut mélanger 10 L de désinfectant et 10 L de dégraissant pour un coût minimal de 22 fr.