Vecteurs, base et composantes

Série 1/5 — Opérations sur les vecteurs et relation de Chasles — Corrigé détaillé (version adulte)

Pour chaque exercice, justifie tes calculs. Rappel : la relation de Chasles s'écrit $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ et, en composantes, on calcule coordonnée par coordonnée.

Exercice 1

Énoncé : Simplifie chacune des expressions à l'aide de la relation de Chasles :

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$
b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$
c) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AC}$
d) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RP}$
e) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (car $-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}$).

c) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.

d) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{PP}=\vec{0}$.

e) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$. Donc la somme vaut $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$.

Exercice 2

Énoncé : Dans le plan, on donne $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$. Calcule les composantes de :

a) $\vec{u}+\vec{v}$
b) $\vec{u}-\vec{v}$
c) $2\vec{u}$
d) $-3\vec{v}$
e) $2\vec{u}-3\vec{v}$

On opère composante par composante.
a) $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ c) $2\vec{u}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ d) $-3\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\-12\end{pmatrix}$

e) $2\vec{u}-3\vec{v}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-16\end{pmatrix}$.

Exercice 3

Énoncé : Dans l'espace, on donne $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$. Calcule :

a) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$
b) $2\vec{u}-\vec{v}+3\vec{w}$
c) $\frac{1}{2}\vec{v}-\vec{u}$

a) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$.

b) $2\vec{u}-\vec{v}+3\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\15\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\11\\10\end{pmatrix}$.

c) $\frac{1}{2}\vec{v}-\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-\frac{7}{2}\end{pmatrix}$.

Exercice 4

Énoncé : On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Détermine le vecteur $\vec{x}$ dans chaque cas :

a) $2\vec{x} - \vec{u} = \vec{v} + \vec{x}$
b) $3\vec{x} + 2\vec{u} = \vec{x} + \vec{v}$

a) On regroupe les $\vec{x}$: $2\vec{x} - \vec{x} = \vec{v} + \vec{u}$, donc $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) $3\vec{x} - \vec{x} = \vec{v} - 2\vec{u}$, donc $2\vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Énoncé : On donne les points $A(-2;3)$, $B(4;-1)$ et $C(1;5)$.
Calcule les composantes de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}$, puis vérifie la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

On soustrait les coordonnées de l'origine à celles de l'extrémité : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Vérification : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}$.

Exercice 6

Énoncé : On donne $A(1;1)$, $B(5;2)$ et $C(6;5)$. Détermine les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

On pose $D(x\,;\,y)$. Alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 6-x \\ 5-y \end{pmatrix}$.

On obtient $6 - x = 4$ et $5 - y = 1$, d'où $x = 2$ et $y = 4$. Donc $D(2;4)$.

Contrôle : $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$.

Exercice 7

Énoncé : Réduis les expressions suivantes (en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{b}$) :

a) $E = 3(\vec{a} - 2\vec{b}) - 2(\vec{a} + \vec{b}) + (4\vec{a} - \vec{b})$
b) $F = 2(3\vec{a} - \vec{b}) - 3(\vec{a} - 2\vec{b}) + \vec{b}$

a) On développe : $E = 3\vec{a} - 6\vec{b} - 2\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{a} - \vec{b}$. Les $\vec{a}$: $3 - 2 + 4 = 5$; les $\vec{b}$: $-6 - 2 - 1 = -9$. Donc $E = 5\vec{a} - 9\vec{b}$.

b) $F = 6\vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{a} + 6\vec{b} + \vec{b}$. Les $\vec{a}$: $6 - 3 = 3$; les $\vec{b}$: $-2 + 6 + 1 = 5$. Donc $F = 3\vec{a} + 5\vec{b}$.

Exercice 8

Énoncé : $ABCD$ est un parallélogramme. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. M est le milieu de $[BC]$.
Exprime en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{DM}$.

Comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{u} + \vec{v}$.

M milieu de $[BC]$: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{v}$. Donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = -\vec{v} + \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$.

Exercice 9

Énoncé : a) Calcule les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$ avec $A(-3;5)$ et $B(7;-1)$.
b) Le point $M'(1;-2)$ est le milieu de $[A'B']$ avec $A'(4;3)$. Détermine les coordonnées de B'.

a) Les coordonnées du milieu sont les moyennes : $x_M = \dfrac{(-3)+7}{2} = 2$ et $y_M = \dfrac{5+(-1)}{2} = 2$. Donc $M(2;2)$.

b) M' milieu de $[A'B']$ donne $\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'})$, donc $B' = 2M' - A'$: $x = 2\cdot 1 - 4 = -2$ et $y = 2\cdot(-2) - 3 = -7$. Donc $B'(-2;-7)$.

Exercice 10

Énoncé : Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ quels que soient les points A, B, C.
b) Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $ABCD$ est un parallélogramme.
c) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
d) Si $k\vec{u} = \vec{0}$, alors $k = 0$.
e) $(-2)\cdot(3\vec{u}) = -6\vec{u}$.

a) **Vrai** : c'est exactement la relation de Chasles, valable pour tous points (même alignés ou confondus).

b) **Faux** : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donne un parallélogramme $ABDC$ (ordre des sommets A, B, D, C) ; et si les quatre points sont alignés, la figure est aplatie.

c) **Vrai** : $\overrightarrow{BA}$ a même direction et même longueur que $\overrightarrow{AB}$, mais le sens opposé.

d) **Faux** : si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$ pour tout réel k. Il faut $k = 0$ *ou* $\vec{u} = \vec{0}$.

e) **Vrai** : $(-2)(3\vec{u}) = (-2\cdot 3)\vec{u} = -6\vec{u}$ (associativité du produit par un scalaire).

Exercice 11

Énoncé : ABC est un triangle et I le milieu de $[BC]$. Démontre que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$.

En additionnant : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$.

I est le milieu de $[BC]$, donc $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Ainsi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

Exercice 12

Énoncé : On donne $A(1;2)$ et $B(7;-4)$. Détermine le point M tel que $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

On pose $M(x\,;\,y)$. Alors $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 2-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 7-x \\ -4-y \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ donne : $1 - x + 2(7-x) = 0$ et $2 - y + 2(-4-y) = 0$, soit $15 - 3x = 0$ et $-6 - 3y = 0$.

D'où $x = 5$ et $y = -2$, donc $M(5;-2)$.

Contrôle : $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$; la somme est bien nulle.

Exercice 13

Énoncé : $ABCD$ est un quadrilatère quelconque, M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[CD]$. Démontre que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

Chasles par deux chemins : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$.

On additionne : $2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN})$.

M milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$. N milieu de $[CD]$: $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{NC}$, donc $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Il reste $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

Exercice 14

Énoncé : Dans un repère, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $\overrightarrow{BC}$. b) Calcule $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et interprète le résultat si I est le milieu de $[BC]$ (indice : exercice 11).

a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. D'après l'exercice 11, ce vecteur vaut $2\overrightarrow{AI}$, donc $\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 15

Énoncé : Un bateau a une vitesse propre $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (en km/h) et le courant a une vitesse $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. La vitesse résultante est $\vec{b} + \vec{c}$.

a) Calcule la vitesse résultante. b) Quel est le déplacement après 3 h ? c) Le pilote veut une vitesse résultante de $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$: quelle vitesse propre doit-il choisir ?

a) $\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ km/h.

b) Déplacement $= 3\,(\vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix}$ km.

c) On cherche $\vec{b}'$ tel que $\vec{b}' + \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\vec{b}' = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ km/h.