Vecteurs, base et composantes

Série 1/5 — Opérations sur les vecteurs et relation de Chasles — Feuille d'exercices (version élève)

Pour chaque exercice, justifie tes calculs. Rappel : la relation de Chasles s'écrit $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ et, en composantes, on calcule coordonnée par coordonnée.

Exercice 1

Simplifie chacune des expressions à l'aide de la relation de Chasles :

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$
b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$
c) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AC}$
d) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RP}$
e) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$

Exercice 2

Dans le plan, on donne $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$. Calcule les composantes de :

a) $\vec{u}+\vec{v}$
b) $\vec{u}-\vec{v}$
c) $2\vec{u}$
d) $-3\vec{v}$
e) $2\vec{u}-3\vec{v}$

Exercice 3

Dans l'espace, on donne $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$. Calcule :

a) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$
b) $2\vec{u}-\vec{v}+3\vec{w}$
c) $\frac{1}{2}\vec{v}-\vec{u}$

Exercice 4

On donne $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$. Détermine le vecteur $\vec{x}$ dans chaque cas :

a) $2\vec{x}-\vec{u}=\vec{v}+\vec{x}$
b) $3\vec{x}+2\vec{u}=\vec{x}+\vec{v}$

Exercice 5

On donne les points $A(-2;3)$, $B(4;-1)$ et $C(1;5)$.
Calcule les composantes de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}$, puis vérifie la relation de Chasles $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Exercice 6

On donne $A(1;1)$, $B(5;2)$ et $C(6;5)$. Détermine les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 7

Réduis les expressions suivantes (en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{b}$) :

a) $E=3(\vec{a}-2\vec{b})-2(\vec{a}+\vec{b})+(4\vec{a}-\vec{b})$
b) $F=2(3\vec{a}-\vec{b})-3(\vec{a}-2\vec{b})+\vec{b}$

Exercice 8

$ABCD$ est un parallélogramme. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. M est le milieu de $[BC]$.
Exprime en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{DM}$.

Exercice 9

a) Calcule les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$ avec $A(-3;5)$ et $B(7;-1)$.
b) Le point $M'(1;-2)$ est le milieu de $[A'B']$ avec $A'(4;3)$. Détermine les coordonnées de B'.

Exercice 10

Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ quels que soient les points A, B, C.
b) Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $ABCD$ est un parallélogramme.
c) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
d) Si $k\vec{u} = \vec{0}$, alors $k = 0$.
e) $(-2)\cdot(3\vec{u}) = -6\vec{u}$.

Exercice 11

ABC est un triangle et I le milieu de $[BC]$. Démontre que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

Exercice 12

On donne $A(1;2)$ et $B(7;-4)$. Détermine le point M tel que $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Exercice 13

$ABCD$ est un quadrilatère quelconque, M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[CD]$. Démontre que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

Exercice 14

Dans un repère, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $\overrightarrow{BC}$. b) Calcule $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et interprète le résultat si I est le milieu de $[BC]$ (indice : exercice 11).

Exercice 15

Un bateau a une vitesse propre $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (en km/h) et le courant a une vitesse $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. La vitesse résultante est $\vec{b} + \vec{c}$.

a) Calcule la vitesse résultante. b) Quel est le déplacement après 3 h ? c) Le pilote veut une vitesse résultante de $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$: quelle vitesse propre doit-il choisir ?