Vecteurs, base et composantes

Série 2/5 — Combinaisons linéaires et géométrie vectorielle — Corrigé détaillé (version adulte)

Écris chaque vecteur comme une combinaison linéaire de vecteurs donnés, puis utilise la relation de Chasles pour démontrer les propriétés géométriques demandées. Rédige chaque étape.

Exercice 1

Énoncé : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$. Écris chacun des vecteurs suivants sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$:

a) $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

b) $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$

$a\vec{u}+b\vec{v} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ donne le système $a+3b=5$ et $2a-b=3$. De la seconde : $b=2a-3$. On remplace : $a+3(2a-3)=5$, donc $7a=14$ et $a=2$, puis $b=1$. Ainsi $\vec{w_1} = 2\vec{u}+\vec{v}$.

$a\vec{u}+b\vec{v} = \begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ donne le système $a+3b=5$ et $2a-b=(-4)$. De la seconde : $b=2a-(-4)$. On remplace : $a+3(2a-(-4))=5$, donc $7a=-7$ et $a=-1$, puis $b=2$. Ainsi $\vec{w_2} = -\vec{u}+2\vec{v}$.

Exercice 2

Énoncé : Dans l'espace, on donne $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}$. Détermine les réels a, b, c tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{t}$.

En composantes : $a+c=3$, $a+b=5$, $b+c=4$.

On additionne les trois équations : $2(a+b+c)=12$, donc $a+b+c=6$.

Alors $b=6-(a+c)=6-3=3$, $c=6-(a+b)=6-5=1$ et $a=6-(b+c)=6-4=2$.

Vérification : $2\vec{u}+3\vec{v}+\vec{t} = \begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix} = \vec{w}$.

Exercice 3

Énoncé : Dans l'espace, $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Dans chaque cas, le vecteur est-il une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

a) $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$

b) $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$

a) On cherche a, b avec $a\vec{u}+b\vec{v} = \vec{w}_1$: $a=1$, $2a+b=5$, $b=2$. La première et la troisième équation donnent $a=1$ et $b=2$, mais alors $2a+b=4\neq 5$. Le système est impossible : $\vec{w}_1$ **n'est pas** une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) $a=2$, $2a+b=5$, $b=1$. Les deux premières donnent $a=2$ et $b=1$, et la troisième est vérifiée ($b=1$). Donc $\vec{w}_2 = 2\vec{u}+\vec{v}$: c'est bien une combinaison linéaire.

Contrôle : $2\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 4

Énoncé : ABC est un triangle, I le milieu de $[BC]$ et G le point défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ (centre de gravité).
a) Démontre que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. b) Démontre que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

a) D'après l'exercice 11 de la série 1, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$, donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Alors $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

b) Chasles : $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

D'après a), $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, donc la somme vaut $\vec{0}$.

Exercice 5

Énoncé : ABC est un triangle. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Les points M, N et I sont définis par $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\vec{u}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\vec{v}$ et I milieu de $[BC]$.
Exprime en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{MI}$.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}$.

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}$.

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{u} - \vec{v}$.

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$, donc $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI} = -\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = -\frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

Exercice 6

Énoncé : On donne $A(2;1)$ et $B(-1;4)$. Détermine les coordonnées du point P tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et du point Q tel que $\overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}$. Donc $P = A + \overrightarrow{AP}$: $x_P = 2 + (-\frac{9}{4}) = -\frac{1}{4}$ et $y_P = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$, soit $P(-\frac{1}{4}; \frac{13}{4})$.

$\overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Donc $x_Q = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ et $y_Q = 4 + (-\frac{3}{2}) = \frac{5}{2}$, soit $Q(\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$.

Exercice 7

Énoncé : $ABCD$ est un parallélogramme. E est le symétrique de A par rapport à B et F le symétrique de A par rapport à D. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.
a) Exprime $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. b) Démontre que $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{BD}$. c) Démontre que C est le milieu de $[EF]$.

a) B est le milieu de $[AE]$, donc $\overrightarrow{AE} = 2\vec{u}$. De même $\overrightarrow{AF} = 2\vec{v}$. Et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$ (car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$).

b) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = -2\vec{u} + 2\vec{v} = 2(\vec{v} - \vec{u})$. Or $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{u} + \vec{v}$. Donc $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{BD}$: (EF) est parallèle à (BD).

c) Le milieu M de $[EF]$ vérifie $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}(2\vec{u} + 2\vec{v}) = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Donc $M = C$: C est le milieu de $[EF]$.

Exercice 8

Énoncé : A, B, C, D sont quatre points quelconques ; I est le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[IJ]$. Pour tout point O, démontre que $4\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

I milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. J milieu de $[CD]$: $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

K milieu de $[IJ]$: $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})\right) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

En multipliant par 4 : $4\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

Exercice 9

Énoncé : $ABCD$ est-il un parallélogramme ? Justifie par un calcul de vecteurs.
a) $A(1;2)$, $B(4;3)$, $C(5;6)$, $D(2;5)$. b) $A(0;0)$, $B(3;1)$, $C(5;4)$, $D(1;3)$.

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Ils sont égaux : $ABCD$ **est** un parallélogramme.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$. Ils sont différents : $ABCD$ **n'est pas** un parallélogramme.

Exercice 10

Énoncé : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \vec{u} + k\vec{v}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Détermine k pour que : a) la première composante de $\vec{w}$ soit nulle ; b) la seconde composante de $\vec{w}$ soit nulle. Donne alors $\vec{w}$.

On a $\vec{w} = \begin{pmatrix}4-2k\\-3+5k\end{pmatrix}$.

a) $4-2k=0$ donne $k=2$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$.

b) $-3+5k=0$ donne $k=\frac{3}{5}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix}\frac{14}{5}\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 11

Énoncé : $ABCDEFGH$ est un parallélépipède ($ABCD$ la face de base, E au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C, H au-dessus de D). On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.
Exprime $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{EC}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Les arêtes parallèles donnent $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH} = \vec{w}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\vec{v} + \vec{u} + \vec{w} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$.

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\vec{w} + \vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$.

Exercice 12

Énoncé : Dans le parallélépipède de l'exercice précédent, O est le centre de la face $ABCD$ et K le centre de la face $EFGH$ (intersection des diagonales). Exprime $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

O est le milieu de $[AC]$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$, donc $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

K est le milieu de $[EG]$: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG}) = \frac{1}{2}\vec{w} + \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$.

$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AO} = \vec{w}$: les deux centres sont à la verticale l'un de l'autre.

$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$.

Exercice 13

Énoncé : Dans l'espace, on donne $A(1;0;2)$, $B(3;1;-1)$ et $C(4;-2;0)$. Détermine les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, puis celles de son centre.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, ce qui s'écrit $D = A + C - B$.

$x_D = 1 + 4 - 3 = 2$, $y_D = 0 + (-2) - 1 = -3$, $z_D = 2 + 0 - (-1) = 3$. Donc $D(2;-3;3)$.

Le centre est le milieu de $[AC]$: $O(\frac{5}{2};-1;1)$. On retrouve le même point avec le milieu de $[BD]$: les diagonales se coupent en leur milieu.

Exercice 14

Énoncé : Détermine les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ vérifiant le système $\begin{cases}2\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}\\ \vec{x} - 3\vec{y} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\end{cases}$

On note (1) $2\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$ et (2) $\vec{x}-3\vec{y}=\vec{b}$. On calcule $3\times(1)+(2)$: $7\vec{x}=3\vec{a}+\vec{b}$.

$3\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}14\\-7\end{pmatrix}$, donc $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Avec (1) : $\vec{y}=\vec{a}-2\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Vérification de (2) : $\vec{x}-3\vec{y}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\vec{b}$.

Exercice 15

Énoncé : $ABCD$ est un quadrilatère quelconque. I, J, K, L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Démontre que $IJKL$ est un parallélogramme (théorème de Varignon).

Il suffit de montrer que $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$.

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{LD}+\overrightarrow{DK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Donc $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$: $IJKL$ est un parallélogramme (éventuellement aplati), quel que soit le quadrilatère $ABCD$.