Vecteurs, base et composantes

Série 2/5 — Combinaisons linéaires et géométrie vectorielle — Feuille d'exercices (version élève)

Écris chaque vecteur comme une combinaison linéaire de vecteurs donnés, puis utilise la relation de Chasles pour démontrer les propriétés géométriques demandées. Rédige chaque étape.

Exercice 1

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Écris chacun des vecteurs suivants sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$:

a) $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Dans l'espace, on donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Détermine les réels a, b, c tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{t}$.

Exercice 3

Dans l'espace, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dans chaque cas, le vecteur est-il une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

a) $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4

ABC est un triangle, I le milieu de $[BC]$ et G le point défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ (centre de gravité).
a) Démontre que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. b) Démontre que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Exercice 5

ABC est un triangle. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Les points M, N et I sont définis par $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\vec{u}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\vec{v}$ et I milieu de $[BC]$.
Exprime en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{MI}$.

Exercice 6

On donne $A(2;1)$ et $B(-1;4)$. Détermine les coordonnées du point P tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et du point Q tel que $\overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 7

$ABCD$ est un parallélogramme. E est le symétrique de A par rapport à B et F le symétrique de A par rapport à D. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.
a) Exprime $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. b) Démontre que $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{BD}$. c) Démontre que C est le milieu de $[EF]$.

Exercice 8

A, B, C, D sont quatre points quelconques ; I est le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[IJ]$. Pour tout point O, démontre que $4\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

Exercice 9

$ABCD$ est-il un parallélogramme ? Justifie par un calcul de vecteurs.
a) $A(1;2)$, $B(4;3)$, $C(5;6)$, $D(2;5)$. b) $A(0;0)$, $B(3;1)$, $C(5;4)$, $D(1;3)$.

Exercice 10

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \vec{u} + k\vec{v}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Détermine k pour que : a) la première composante de $\vec{w}$ soit nulle ; b) la seconde composante de $\vec{w}$ soit nulle. Donne alors $\vec{w}$.

Exercice 11

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède ($ABCD$ la face de base, E au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C, H au-dessus de D). On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.
Exprime $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{EC}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Exercice 12

Dans le parallélépipède de l'exercice précédent, O est le centre de la face $ABCD$ et K le centre de la face $EFGH$ (intersection des diagonales). Exprime $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Exercice 13

Dans l'espace, on donne $A(1;0;2)$, $B(3;1;-1)$ et $C(4;-2;0)$. Détermine les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, puis celles de son centre.

Exercice 14

Détermine les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ vérifiant le système $\begin{cases} 2\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \vec{x} - 3\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$

Exercice 15

$ABCD$ est un quadrilatère quelconque. I, J, K, L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Démontre que $IJKL$ est un parallélogramme (théorème de Varignon).