Vecteurs, base et composantes

Série 3/5 — Base et composantes dans le plan — Corrigé détaillé (version adulte)

Dans le plan, une base est formée de deux vecteurs non colinéaires. Chaque vecteur se décompose de manière unique sur une base : ses composantes. Rappel : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant $u_1v_2 - u_2v_1$ est nul.

Exercice 1

Énoncé : Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

a) Donne les composantes de $\vec{v} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ et de $\vec{w} = \vec{e}_2 - 4\vec{e}_1$.

b) Écris le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ comme combinaison de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.

c) Calcule $2\vec{v} + \vec{w}$ en composantes.

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; pour $\vec{w}$, on remet les termes dans l'ordre : $\vec{w} = -4\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Les composantes sont les coefficients : $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = -\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$.

c) $2\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Énoncé : Dans chaque cas, dis si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base du plan.

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) = 7 \neq 0$: les vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une **base**.

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-4) \cdot (-1) = 0 = 0$: les vecteurs sont colinéaires, ils ne forment **pas** une base.

c) $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) - 0 \cdot 0 = -15 \neq 0$: les vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une **base**.

d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0 = 0$: les vecteurs sont colinéaires, ils ne forment **pas** une base.

Exercice 3

Énoncé : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (une base). Détermine les composantes de chaque vecteur dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$:

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) On résout $a+3b = 5$ et $2a-b = 3$. Le déterminant du système est -7. On trouve $a = 2$ et $b = 1$: les composantes

dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ sont $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

b) On résout $a+3b=7$ et $2a-b=0$. Le déterminant du système est -7. On trouve $a=1$ et $b=2$: les composantes dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ sont $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

c) On résout $a+3b=-2$ et $2a-b=5$. Le déterminant du système est -7. On trouve $a=\frac{13}{7}$ et $b=-\frac{9}{7}$: les composantes dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ sont $\begin{pmatrix}\frac{13}{7}\\-\frac{9}{7}\end{pmatrix}$.

Exercice 4

Énoncé : ABC est un triangle. On l'associe à la base $(\vec{u},\vec{v})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. Donne les composantes dans cette base de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AI}$ (I milieu de $[BC]$) et $\overrightarrow{AG}$ (G centre de gravité).

$\overrightarrow{AB}=1\cdot\vec{u}+0\cdot\vec{v}$, donc ses composantes sont $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\vec{u}+\vec{v}$, donc $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, donc $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, donc $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Exercice 5

Énoncé : $ABCD$ est un parallélogramme ; on prend la base $(\vec{u},\vec{v})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$. Soit M le milieu de $[CD]$ et N le point tel que $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Donne les composantes de $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{u}+\vec{v}$, donc $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\vec{u}+\vec{v}$, donc $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{u}$, donc $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v})$, donc $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Exercice 6

Énoncé : Pour quelles valeurs réelles de k les vecteurs $\vec{u}=\begin{pmatrix}k\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\k+1\end{pmatrix}$ ne forment-ils *pas* une base ?

Ils ne forment pas une base si et seulement si ils sont colinéaires, c'est-à-dire si leur déterminant est nul.

$\begin{vmatrix}k & 3\\2 & k+1\end{vmatrix}=k(k+1)-6=k^2+k-6$.

$k^2+k-6=0$: le discriminant vaut $1+24=25$, donc $k=\dfrac{-1\pm5}{2}$, soit $k=2$ ou $k=-3$.

Contrôle : pour $k=2$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$; pour $k=-3$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$. Dans les deux cas ils sont colinéaires.

Exercice 7

Énoncé : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

a) $\vec{u}=\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\-7\end{pmatrix}$

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\12\end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}6 & -4\\-9 & 6\end{vmatrix} = 0$: colinéaires. (On a $\vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{v}$.)

b) $\begin{vmatrix}2 & 4\\5 & 9\end{vmatrix} = -2 \neq 0$: non colinéaires.

c) $\begin{vmatrix}0 & 0\\3 & -7\end{vmatrix} = 0$: colinéaires.

d) $\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 3\\2 & 12\end{vmatrix} = 0$: colinéaires. (On a $\vec{v} = 6\vec{u}$.)

Exercice 8

Énoncé : Détermine la (ou les) valeur(s) de x pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\8\end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}x & 3\\6 & 2\end{vmatrix} = 2x - 18 = 0$ donc $x = 9$. Alors $\vec{u}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix} = 3\vec{v}$.

b) $\begin{vmatrix}2 & x\\x & 8\end{vmatrix} = 16 - x^2 = 0$ donc $x = 4$ ou $x = -4$.

Contrôle : pour $x = 4$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix} = 2\vec{u}$; pour $x = -4$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix} = -2\vec{u}$.

Exercice 9

Énoncé : a) Les points $A(1;2)$, $B(3;6)$, $C(-1;-2)$ sont-ils alignés ?
b) Même question pour $A(0;1)$, $B(2;4)$, $C(5;6)$.
c) Avec $A(1;2)$ et $B(3;6)$, détermine y pour que $D(5\,;\,y)$ soit aligné avec A et B.

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}2 & -2\\4 & -4\end{vmatrix} = -8 + 8 = 0$. Les vecteurs sont colinéaires ($\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$), donc A, B, C sont alignés.

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}2 & 5\\3 & 5\end{vmatrix} = 10 - 15 = -5 \neq 0$. Les points ne sont pas alignés.

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\y-2\end{pmatrix}$. Colinéarité : $2(y-2) - 4\cdot 4 = 0$, donc $2y - 20 = 0$ et $y = 10$. Ainsi $D(5\,;\,10)$.

Exercice 10

Énoncé : Dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, détermine les composantes de $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

On cherche a et b avec $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$: $2a + b = 1$ et $-a + 3b = 1$.

De la seconde, $a = 3b - 1$. On remplace : $2(3b-1) + b = 1$, donc $7b = 3$ et $b = \frac{3}{7}$.

Alors $a = 3\cdot\frac{3}{7} - 1 = \frac{2}{7}$.

Les composantes de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ sont $\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{3}{7}\end{pmatrix}$. Vérification : $\frac{2}{7}\vec{u} + \frac{3}{7}\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 11

Énoncé : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Montre que si $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$, alors nécessairement $a = b = 0$ (on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants).

$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ s'écrit : $a + 3b = 0$ et $2a + b = 0$.

De la première, $a = -3b$. Dans la seconde : $-6b + b = 0$, donc $-5b = 0$ et $b = 0$.

Alors $a = -3 \cdot 0 = 0$. La seule combinaison nulle est celle de coefficients nuls : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment bien une base (leur déterminant $1 - 6 = -5$ est d'ailleurs non nul).

Exercice 12

Énoncé : On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcule $2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$.

$2\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $-\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La somme vaut $\begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Exercice 13

Énoncé : On donne $A(-1;-1)$, $B(3;0)$ et $C(5;4)$. a) Détermine les coordonnées de D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme. b) Donne les composantes de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$. c) Détermine les coordonnées du point d'intersection O des diagonales.

a) $D = A + C - B = (-1 + 5 - 3\,;\, -1 + 4 - 0) = D(1;3)$.

b) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) O est le milieu de $[AC]$: $O(2;\frac{3}{2})$. C'est aussi le milieu de $[BD]$ (vérifie : $\frac{3+1}{2} = 2$ et $\frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$).

Exercice 14

Énoncé : On donne $A(0;0)$, $B(4;2)$, $C(3;5)$, $D(1;4)$. Montre que $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$, et qu'il n'est pas un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$, ces vecteurs sont colinéaires : $(AB) \parallel (DC)$.

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7 \neq 0$, donc (AD) et (BC) ne sont pas parallèles.

$ABCD$ a exactement une paire de côtés parallèles : c'est un trapèze qui n'est pas un parallélogramme. (Pour un parallélogramme il faudrait $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.)

Exercice 15

Énoncé : Un objet est soumis à deux forces $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (en newtons). a) Quelle troisième force $\vec{F}_3$ le met à l'équilibre (somme nulle) ? b) Quelles sont les composantes de la force résultante de $\vec{F}_1$ et $2\vec{F}_2$?

a) On veut $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$, donc $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = -\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ N.

b) $\vec{F}_1 + 2\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ N.