Vecteurs, base et composantes

Série 3/5 — Base et composantes dans le plan — Feuille d'exercices (version élève)

Dans le plan, une base est formée de deux vecteurs non colinéaires. Chaque vecteur se décompose de manière unique sur une base : ses composantes. Rappel : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant $u_1 v_2 - u_2 v_1$ est nul.

Exercice 1

Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

a) Donne les composantes de $\vec{v} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ et de $\vec{w} = \vec{e}_2 - 4\vec{e}_1$.

b) Écris le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ comme combinaison de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.

c) Calcule $2\vec{v} + \vec{w}$ en composantes.

Exercice 2

Dans chaque cas, dis si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base du plan.

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (une base). Détermine les composantes de chaque vecteur dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$:

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Exercice 4

ABC est un triangle. On l'associe à la base $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Donne les composantes dans cette base de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AI}$ (I milieu de $[BC]$) et $\overrightarrow{AG}$ (G centre de gravité).

Exercice 5

$ABCD$ est un parallélogramme ; on prend la base $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Soit M le milieu de $[CD]$ et N le point tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Donne les composantes de $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$.

Exercice 6

Pour quelles valeurs réelles de k les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ k+1 \end{pmatrix}$ ne forment-ils *pas* une base ?

Exercice 7

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\-7\end{pmatrix}$

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\12\end{pmatrix}$

Exercice 8

Détermine la (ou les) valeur(s) de x pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires :

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix}x\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}x\\8\end{pmatrix}$

Exercice 9

a) Les points $A(1;2)$, $B(3;6)$, $C(-1;-2)$ sont-ils alignés ?
b) Même question pour $A(0;1)$, $B(2;4)$, $C(5;6)$.
c) Avec $A(1;2)$ et $B(3;6)$, détermine y pour que $D(5\,;\,y)$ soit aligné avec A et B.

Exercice 10

Dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, détermine les composantes de $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 11

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Montre que si $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$, alors nécessairement $a = b = 0$ (on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants).

Exercice 12

On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$. Calcule $2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$.

Exercice 13

On donne $A(-1;-1)$, $B(3;0)$ et $C(5;4)$. a) Détermine les coordonnées de D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme. b) Donne les composantes de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$. c) Détermine les coordonnées du point d'intersection O des diagonales.

Exercice 14

On donne $A(0;0)$, $B(4;2)$, $C(3;5)$, $D(1;4)$. Montre que $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$, et qu'il n'est pas un parallélogramme.

Exercice 15

Un objet est soumis à deux forces $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ (en newtons). a) Quelle troisième force $\vec{F}_3$ le met à l'équilibre (somme nulle) ? b) Quelles sont les composantes de la force résultante de $\vec{F}_1$ et $2\vec{F}_2$?