Vecteurs, base et composantes

Série 4/5 — Base et composantes dans l'espace — Corrigé détaillé (version adulte)

Dans l'espace, une base est formée de trois vecteurs non coplanaires ; chaque vecteur a trois composantes. Les opérations se font composante par composante, comme dans le plan.

Exercice 1

Énoncé : Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

a) Donne les composantes de $\vec{v} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ et de $\vec{w} = \vec{e}_3 - 4\vec{e}_1$.

b) Écris $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme combinaison de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

c) Calcule $2\vec{v} - \vec{w}$.

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = -4\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (le $\vec{e}_2$ est absent, son coefficient est 0).

b) $\vec{a} = 0\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = 5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$.

c) $2\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Énoncé : On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calcule :

a) $3\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$

b) $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{w})$

c) $\vec{u} - 2\vec{v} - 3\vec{w}$

a) $3\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u} - 2\vec{v} - 3\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Énoncé : On donne $A(2;-1;3)$ et $B(-4;5;1)$. Détermine les composantes de $\overrightarrow{AB}$, les coordonnées du milieu M de $[AB]$ et celles du point A' symétrique de A par rapport à B.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

M : moyenne des coordonnées, $M(-1;2;2)$.

B est le milieu de $[AA']$, donc $A' = 2B - A = (2\cdot(-4) - 2\,;\, 2\cdot 5 + 1\,;\, 2\cdot 1 - 3) = A'(-10;11;-1)$.

Contrôle : $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{AB}$.

Exercice 4

Énoncé : $ABCDEFGH$ est un parallélépipède (E au-dessus de A, etc.). On prend la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. Donne les composantes de $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EC}$, puis de $\overrightarrow{IJ}$ où I est le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[GH]$.

$\overrightarrow{AG} = \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, donc $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BH} = -\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, donc $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{DF} = \vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$, donc $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC} = \vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$, donc $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

I milieu de $[BC]$: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$. J milieu de $[GH]$ avec $\overrightarrow{AG} = \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ et $\overrightarrow{AH} = \vec{v}+\vec{w}$: $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AH}) = \frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = \left(\frac{1}{2}-1\right)\vec{u} + \left(1-\frac{1}{2}\right)\vec{v} + \vec{w}$, donc $\overrightarrow{IJ}$ a pour composantes $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 5

Énoncé : $ABCD$ est un tétraèdre ; on prend la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$. Donne les composantes de $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AI}$ (I milieu de $[BC]$) et $\overrightarrow{AG}$ où G est le centre de gravité du triangle BCD (c'est-à-dire $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$).

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC} = -\vec{u}+\vec{v}$, donc $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD} = -\vec{v}+\vec{w}$, donc $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$, donc $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}$, donc $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Exercice 6

Énoncé : On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix}2\\5\\10\end{pmatrix}$. Détermine a, b, c tels que $\vec{w} = a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{t}$.

Le système est : $a = 2$ (1re ligne), $a+b = 5$ (2e ligne), $a+2b+c = 10$ (3e ligne).

On résout de proche en proche : $a = 2$, puis $b = 5-2 = 3$, puis $c = 10-2-2\cdot 3 = 2$.

Vérification : $2\vec{u}+3\vec{v}+2\vec{t} = \begin{pmatrix}2\\5\\10\end{pmatrix} = \vec{w}$.

Exercice 7

Énoncé : Détermine les réels a et b tels que $\begin{pmatrix}a\\2\\b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\b\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix}$.

Deux vecteurs sont égaux si leurs composantes sont égales : $a+3 = 5$, $2+b = 5$, $b-1 = 2$.

On obtient $a = 2$ et $b = 3$ (les deux dernières équations donnent la même valeur $b = 3$, le système est compatible).

Vérification : $\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix}$.

Exercice 8

Énoncé : Les vecteurs sont-ils colinéaires ?

a) $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}=\begin{pmatrix}k\\6\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$: trouve k pour qu'ils le soient.

a) Deux vecteurs sont colinéaires si les composantes de l'un sont proportionnelles à celles de l'autre. Ici $\vec{u}=-2\vec{v}$: $2=-2\cdot(-1)$, $-4=-2\cdot 2$, $6=-2\cdot(-3)$. Ils sont colinéaires.

b) Les deux premières composantes donnent un rapport de 2 ($2=2\cdot 1$, $4=2\cdot 2$), mais $7\neq 2\cdot 3$. Ils ne sont pas colinéaires.

c) On cherche λ avec $\vec{u}=\lambda\vec{v}$: $6=4\lambda$ donne $\lambda=\frac{3}{2}$, et la troisième composante confirme : $-3=\frac{3}{2}\cdot(-2)$. Alors $k=\frac{3}{2}\cdot 2=3$.

Exercice 9

Énoncé : a) Les points $A(1;2;3)$, $B(3;1;0)$, $C(7;-1;-6)$ sont-ils alignés ? b) Même question avec $O(0;0;0)$, $P(1;2;3)$, $Q(2;4;7)$.

a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}6\\-3\\-9\end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$, donc les points sont alignés.

b) $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$. Le rapport vaut 2 pour les deux premières composantes mais $7\neq 2\cdot 3$ pour la troisième : non colinéaires, donc O, P, Q ne sont pas alignés.

Exercice 10

Énoncé : $ABCD$ est-il un parallélogramme ? a) $A(1;1;1)$, $B(2;3;0)$, $C(5;4;2)$, $D(4;2;3)$. b) Mêmes points A, B, C avec $D'(4;2;4)$.

a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$: égaux, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

b) $\overrightarrow{DC}$ devient $\overrightarrow{D'C}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\neq\overrightarrow{AB}$: $ABCD'$ n'est pas un parallélogramme.

Exercice 11

Énoncé : On donne $A(1;2;-1)$, $B(3;0;2)$, $C(-2;4;1)$ et $D(2;2;2)$. Calcule les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC et celles du centre de gravité G' du tétraèdre $ABCD$ (moyenne des coordonnées).

G : $x=\dfrac{1+3-2}{3}=\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{2+0+4}{3}=2$, $z=\dfrac{-1+2+1}{3}=\dfrac{2}{3}$. Donc $G(\frac{2}{3};2;\frac{2}{3})$.

G' : $x=\dfrac{1+3-2+2}{4}=1$, $y=\dfrac{2+0+4+2}{4}=2$, $z=\dfrac{-1+2+1+2}{4}=1$. Donc $G'(1;2;1)$.

Exercice 12

Énoncé : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Existe-t-il un réel k tel que $\vec{u} + k\vec{v} = \vec{w}$? a) $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) On cherche k : $1 + 2k = 5$, $-2 + k = 0$, $3 - k = 1$. Les trois équations donnent $k = 2$: oui, $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$.

b) $1 + 2k = 5$ donne $k = 2$, mais $-2 + k = -1$ donne $k = 1$: contradiction. Il n'existe pas de tel k.

Exercice 13

Énoncé : Un drone effectue trois déplacements successifs (est, nord, altitude, en mètres) : $\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 300 \\ -200 \\ 50 \end{pmatrix}$, $\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -100 \\ 400 \\ 120 \end{pmatrix}$, $\vec{d}_3 = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ -500 \end{pmatrix}$.

a) Quel est son déplacement total ? b) Quel déplacement $\vec{r}$ doit-il faire pour revenir à son point de départ ? c) Quel déplacement fait-il en $\vec{d}_1 + 2\vec{d}_2$?

a) $\vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ -330 \end{pmatrix}$ m.

b) Le retour est l'opposé du total : $\vec{r} = -\begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ -330 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -400 \\ -200 \\ 330 \end{pmatrix}$ m.

c) $\vec{d}_1 + 2\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 300 \\ -200 \\ 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -200 \\ 800 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 600 \\ 290 \end{pmatrix}$ m.

Exercice 14

Énoncé : Détermine les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de l'espace tels que $\begin{cases} 2\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \vec{x} - 3\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$

(1) $2\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$ et (2) $\vec{x} - 3\vec{y} = \vec{b}$. $3 \times (1) + (2)$ donne $7\vec{x} = 3\vec{a} + \vec{b}$.

$3\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 21 \end{pmatrix}$, donc $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Par (1) : $\vec{y} = \vec{a} - 2\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vérification de (2) : $\vec{x} - 3\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{b}$.

Exercice 15

Énoncé : Dans le parallélépipède $ABCDEFGH$ muni de la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, I est le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CG]$ et K le milieu de $[EH]$.

a) Donne les composantes de $\overrightarrow{IJ}$ et de $\overrightarrow{IK}$. b) Calcule $2\overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{IK}$. c) $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont-ils colinéaires ?

a) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\vec{u}$; $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} = \vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$; $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} = \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

Donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $2\overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{IK} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}$.

c) Si $\overrightarrow{IJ} = \lambda\overrightarrow{IK}$, la première composante imposerait $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\lambda$, soit $\lambda = -1$, mais alors la deuxième donnerait $1 = -\frac{1}{2}$: faux. Les vecteurs ne sont pas colinéaires.