Vecteurs, base et composantes

Série 4/5 — Base et composantes dans l'espace — Feuille d'exercices (version élève)

Dans l'espace, une base est formée de trois vecteurs non coplanaires ; chaque vecteur a trois composantes. Les opérations se font composante par composante, comme dans le plan.

Exercice 1

Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

a) Donne les composantes de $\vec{v} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ et de $\vec{w} = \vec{e}_3 - 4\vec{e}_1$.

b) Écris $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme combinaison de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

c) Calcule $2\vec{v} - \vec{w}$.

Exercice 2

On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calcule :

a) $3\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$

b) $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{w})$

c) $\vec{u} - 2\vec{v} - 3\vec{w}$

Exercice 3

On donne $A(2; -1; 3)$ et $B(-4; 5; 1)$. Détermine les composantes de $\overrightarrow{AB}$, les coordonnées du milieu M de $[AB]$ et celles du point A' symétrique de A par rapport à B.

Exercice 4

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède (E au-dessus de A, etc.). On prend la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Donne les composantes de $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EC}$, puis de $\overrightarrow{IJ}$ où I est le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[GH]$.

Exercice 5

$ABCD$ est un tétraèdre ; on prend la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Donne les composantes de $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AI}$ (I milieu de $[BC]$) et $\overrightarrow{AG}$ où G est le centre de gravité du triangle BCD (c'est-à-dire $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$).

Exercice 6

On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$. Détermine a, b, c tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{t}$.

Exercice 7

Détermine les réels a et b tels que $\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ b \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8

Les vecteurs sont-ils colinéaires ?

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} k \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$: trouve k pour qu'ils le soient.

Exercice 9

a) Les points $A(1;2;3)$, $B(3;1;0)$, $C(7;-1;-6)$ sont-ils alignés ? b) Même question avec $O(0;0;0)$, $P(1;2;3)$, $Q(2;4;7)$.

Exercice 10

$ABCD$ est-il un parallélogramme ? a) $A(1;1;1)$, $B(2;3;0)$, $C(5;4;2)$, $D(4;2;3)$. b) Mêmes points A, B, C avec $D'(4;2;4)$.

Exercice 11

On donne $A(1;2;-1)$, $B(3;0;2)$, $C(-2;4;1)$ et $D(2;2;2)$. Calcule les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC et celles du centre de gravité G' du tétraèdre $ABCD$ (moyenne des coordonnées).

Exercice 12

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Existe-t-il un réel k tel que $\vec{u} + k\vec{v} = \vec{w}$? a) $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 13

Un drone effectue trois déplacements successifs (est, nord, altitude, en mètres) : $\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 300 \\ -200 \\ 50 \end{pmatrix}$, $\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -100 \\ 400 \\ 120 \end{pmatrix}$, $\vec{d}_3 = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ -500 \end{pmatrix}$.

a) Quel est son déplacement total ? b) Quel déplacement $\vec{r}$ doit-il faire pour revenir à son point de départ ? c) Quel déplacement fait-il en $\vec{d}_1 + 2\vec{d}_2$?

Exercice 14

Détermine les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de l'espace tels que $\begin{cases} 2\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \vec{x} - 3\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$

Exercice 15

Dans le parallélépipède $ABCDEFGH$ muni de la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, I est le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CG]$ et K le milieu de $[EH]$.

a) Donne les composantes de $\overrightarrow{IJ}$ et de $\overrightarrow{IK}$. b) Calcule $2\overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{IK}$. c) $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont-ils colinéaires ?