Vecteurs, base et composantes

Série 5/5 — Colinéarité, coplanarité et déterminant 3×3 — Corrigé détaillé (version adulte)

Trois vecteurs de l'espace sont coplanaires si et seulement si leur déterminant 3×3 est nul ; ils forment alors une base si et seulement si ce déterminant est non nul. On développe selon la première ligne : $\det = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$.

Exercice 1

Énoncé : Calcule le déterminant des trois vecteurs et dis s'ils sont coplanaires :

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}1&0&5\\2&1&6\\3&4&0\end{vmatrix} = 1\cdot(-24) - 0\cdot(-18) + 5\cdot5 = 1$. Le déterminant est non nul : les vecteurs ne sont **pas** coplanaires (ils forment une base).

b) $\begin{vmatrix}1&2&0\\2&4&1\\3&6&1\end{vmatrix} = 1\cdot(-2) - 2\cdot(-1) + 0\cdot0 = 0$. Le déterminant est nul : les vecteurs sont **coplanaires**. (Ici $\vec{v} = 2\vec{u}$.)

c) $\begin{vmatrix}2&1&0\\0&3&-2\\1&-1&4\end{vmatrix} = 2\cdot10 - 1\cdot2 + 0\cdot(-3) = 18$. Le déterminant est non nul : les vecteurs ne sont **pas** coplanaires (ils forment une base).

Exercice 2

Énoncé : Détermine k pour que $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\k\\5\end{pmatrix}$ soient coplanaires.

On développe selon la première ligne : $\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&k\\-1&3&5\end{vmatrix} = 1\cdot(1\cdot5 - 3k) - 0 + 1\cdot(2\cdot3 - (-1)\cdot1) = 5 - 3k + 7 = 12 - 3k$.

Coplanaires $\iff 12 - 3k = 0 \iff k = 4$.

Contrôle : pour $k = 4$, $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$: $(1+0\,;\,2+2\,;\,-1+6) = (1\,;\,4\,;\,5)$.

Exercice 3

Énoncé : a) Montre que $\vec{w} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. b) Que peut-on en conclure pour $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$? Confirme avec le déterminant.

a) On cherche a, b : $a = 2$ (1re ligne), $a + b = 3$ (2e ligne), $b = 1$ (3e ligne). Les valeurs $a = 2$, $b = 1$ conviennent aux trois équations : $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$.

b) Un vecteur combinaison de deux autres est dans leur plan : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.

Déterminant : $\begin{vmatrix}1&0&2\\1&1&3\\0&1&1\end{vmatrix} = 1\cdot(-2) - 0\cdot1 + 2\cdot1 = 0$. Il est nul, ce qui confirme la coplanarité.

Exercice 4

Énoncé : On donne $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires pour : a) $D(2;0;-3)$? b) $D(1;1;1)$?

On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$. Les quatre points sont coplanaires si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ le sont.

a) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $\begin{vmatrix}-1 & -1 & 1\\2 & 0 & 0\\0 & 3 & -3\end{vmatrix} = (-1)\cdot 0 - (-1)\cdot(-6) + 1\cdot 6 = 0$. Déterminant nul : A, B, C, D sont coplanaires.

b) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{vmatrix}-1 & -1 & 0\\2 & 0 & 1\\0 & 3 & 1\end{vmatrix} = (-1)\cdot(-3) - (-1)\cdot 2 + 0\cdot 6 = 5$. Déterminant non nul : les points ne sont pas coplanaires.

Exercice 5

Énoncé : Dans chaque cas, les trois vecteurs forment-ils une base de l'espace ?

a) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\2 & 1 & 0\end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 0\cdot(-2) + 1\cdot(-2) = -3$. Déterminant non nul : c'est une **base**.

b) $\begin{vmatrix}1 & 4 & 7\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 9\end{vmatrix} = 1\cdot(-3) - 4\cdot(-6) + 7\cdot(-3) = 0$. Déterminant nul : ce n'est **pas** une base.

Exercice 6

Énoncé : Pour quelles valeurs de m les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\m\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\m\end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix}m\\0\\1\end{pmatrix}$ ne forment-ils pas une base ?

Ils ne forment pas une base si et seulement si leur déterminant est nul.

$\begin{vmatrix}1 & 0 & m\\m & 1 & 0\\0 & m & 1\end{vmatrix} = 1\cdot(1\cdot 1 - m\cdot 0) - 0 + m\cdot(m\cdot m - 1\cdot 0) = 1 + m^3$.

$1 + m^3 = 0 \iff m^3 = -1 \iff m = -1$ (le cube d'un réel est égal à -1 seulement pour -1).

Contrôle : pour $m = -1$, $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix}1+0-1\\-1+1+0\\0-1+1\end{pmatrix} = \vec{0}$, donc les vecteurs sont dépendants (coplanaires).

Exercice 7

Énoncé : a) Montre que $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ forment une base de l'espace. b) Détermine les composantes de $\vec{w} = \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}$ dans cette base.

a) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 1 & 0\\0 & 1 & -1\end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 0\cdot(-2) + 1\cdot 2 = 1$. Le déterminant est non nul : $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base.

b) On cherche x, y, z tels que $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{w}$: $x + z = 3$, $2x + y = 4$, $y - z = -1$.

De la première, $z = 3 - x$. De la troisième, $y = z - 1 = 2 - x$. Dans la deuxième : $2x + 2 - x = 4$, donc $x = 2$, puis $y = 0$ et $z = 1$.

Les composantes de $\vec{w}$ sont $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$. Vérification : $2\vec{a} + 0\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice 8

Énoncé : On donne $A(1\,;\,2\,;\,3)$, $B(2\,;\,4\,;\,5)$ et $C(3\,;\,6\,;\,q)$. Détermine q pour que A, B, C soient alignés.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\4\\q-3\end{pmatrix}$.

Alignés $\iff \overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Les deux premières composantes donnent $\lambda = 2$.

La troisième impose $q - 3 = 2 \cdot 2 = 4$, donc $q = 7$.

Exercice 9

Énoncé : Dans le cube $ABCDEFGH$ (repère d'origine A et de base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, donc $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $C(1\,;1\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$, $E(0\,;0\,;1)$, $G(1\,;1\,;1)$), les points suivants sont-ils coplanaires ? a) A, C, G, E b) B, D, E, G

a) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. On voit que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$, donc les trois vecteurs sont coplanaires. Avec le déterminant : $\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$.

b) $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. $\begin{vmatrix}-1&-1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1) - (-1)\cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2$. Déterminant non nul : B, D, E, G ne sont pas coplanaires.

Exercice 10

Énoncé : Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$. Montre que $\vec{c} = 2\vec{b} - \vec{a}$, puis calcule le déterminant. Que remarques-tu ?

$2\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}8\\10\\12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = \vec{c}$.

Déterminant : $\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 4 \cdot (-6) + 7 \cdot (-3) = 0$.

Un vecteur est combinaison linéaire des deux autres, donc les trois vecteurs sont coplanaires, ce que confirme le déterminant nul : ils ne forment pas une base.

Exercice 11

Énoncé : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace. Détermine a, b, c tels que $a(\vec{u} + \vec{v}) + b(\vec{v} + \vec{w}) + c(\vec{w} + \vec{u}) = 5\vec{u} + 3\vec{v} + 4\vec{w}$.

On regroupe : $(a + c)\vec{u} + (a + b)\vec{v} + (b + c)\vec{w} = 5\vec{u} + 3\vec{v} + 4\vec{w}$.

Comme les composantes dans une base sont uniques : $a + c = 5$, $a + b = 3$, $b + c = 4$.

On additionne : $2(a + b + c) = 12$, donc $a + b + c = 6$. Alors $b = 6 - 5 = 1$, $c = 6 - 3 = 3$, $a = 6 - 4 = 2$.

Vérification : $a + c = 5$, $a + b = 3$, $b + c = 4$. Les trois équations sont satisfaites.

Exercice 12

Énoncé : $ABCD$ est un tétraèdre quelconque. I, J, K, L sont les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Démontre que $IJKL$ est un parallélogramme ; que peut-on en déduire pour les points I, J, K, L ?

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$: $IJKL$ est un parallélogramme.

Un parallélogramme est une figure plane : même si A, B, C, D ne sont pas dans un même plan, les quatre milieux I, J, K, L sont coplanaires.

Exercice 13

Énoncé : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base. On pose $\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$, $\vec{b} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ et $\vec{c} = 3\vec{u} + \vec{v} + k\vec{w}$. Pour quelle valeur de k les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sont-ils coplanaires ?

Leurs composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & k \end{vmatrix} = 1 \cdot (-k - 1) - 2 \cdot (2k + 1) + 3 \cdot (2 - 1) = -k - 1 - 4k - 2 + 3 = -5k.$$

Coplanaires $\iff -5k = 0 \iff k = 0$.

Contrôle : pour $k = 0$, $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{c}$.

Exercice 14

Énoncé : On donne $A(1\,;\,0\,;\,0)$, $B(0\,;\,2\,;\,0)$ et $C(0\,;\,0\,;\,3)$. a) Écris la condition pour qu'un point $D(x\,;\,y\,;\,z)$ soit dans le plan (ABC). b) Les points $D_1(2\,;\,0\,;\,-3)$ et $D_2(1\,;\,1\,;\,1)$ sont-ils dans ce plan ?

a) D est dans le plan (ABC) si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, avec $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ 0 & 3 & z \end{vmatrix} = -1 \cdot (0 \cdot z - 3y) - (-1) \cdot (2z - 0) + (x-1) \cdot (2 \cdot 3 - 0) = 3y + 2z + 6(x-1).$$

La condition est donc $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

b) D_1 : $6 \cdot 2 + 0 + 2 \cdot (-3) - 6 = 12 - 6 - 6 = 0$: D_1 est dans le plan. D_2 : $6 + 3 + 2 - 6 = 5 \neq 0$: D_2 n'y est pas.

Contrôle : A : $6 - 6 = 0$; B : $6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 0 - 6 = 0$; C : $0 + 0 + 2 \cdot 3 - 6 = 0$. Les trois points vérifient bien la condition.

Exercice 15

Énoncé : A, B, C, D sont quatre points de l'espace. a) Montre que le point G défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ vérifie, pour tout point O, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. b) Calcule G pour $A(1;2;-1)$, $B(3;0;2)$, $C(-2;4;1)$, $D(2;2;2)$.

a) Chasles avec O : $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}$, et de même pour B, C, D.

En additionnant : $\vec{0} = 4\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$, donc $4\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ (car $\overrightarrow{GO} = -\overrightarrow{OG}$).

Le point G ne dépend donc pas de O : c'est le centre de gravité du tétraèdre.

b) En prenant O comme origine, les coordonnées de G sont les moyennes : $\frac{1+3-2+2}{4} = 1$, $\frac{2+0+4+2}{4} = 2$, $\frac{-1+2+1+2}{4} = 1$. Donc $G(1;2;1)$.