Vecteurs, base et composantes

Série 5/5 — Colinéarité, coplanarité et déterminant 3×3 — Feuille d'exercices (version élève)

Trois vecteurs de l'espace sont coplanaires si et seulement si leur déterminant 3×3 est nul ; ils forment alors une base si et seulement si ce déterminant est non nul. On développe selon la première ligne : $\det = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$.

Exercice 1

Calcule le déterminant des trois vecteurs et dis s'ils sont coplanaires :

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}$

Exercice 2

Détermine k pour que $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\k\\5\end{pmatrix}$ soient coplanaires.

Exercice 3

a) Montre que $\vec{w} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. b) Que peut-on en conclure pour $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$? Confirme avec le déterminant.

Exercice 4

On donne $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires pour : a) $D(2;0;-3)$? b) $D(1;1;1)$?

Exercice 5

Dans chaque cas, les trois vecteurs forment-ils une base de l'espace ?

a) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$

Exercice 6

Pour quelles valeurs de m les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\m\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\m\end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix}m\\0\\1\end{pmatrix}$ ne forment-ils pas une base ?

Exercice 7

a) Montre que $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ forment une base de l'espace. b) Détermine les composantes de $\vec{w} = \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 8

On donne $A(1\,;\,2\,;\,3)$, $B(2\,;\,4\,;\,5)$ et $C(3\,;\,6\,;\,q)$. Détermine q pour que A, B, C soient alignés.

Exercice 9

Dans le cube $ABCDEFGH$ (repère d'origine A et de base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, donc $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $C(1\,;1\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$, $E(0\,;0\,;1)$, $G(1\,;1\,;1)$), les points suivants sont-ils coplanaires ? a) A, C, G, E b) B, D, E, G

Exercice 10

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$. Montre que $\vec{c} = 2\vec{b} - \vec{a}$, puis calcule le déterminant. Que remarques-tu ?

Exercice 11

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace. Détermine a, b, c tels que $a(\vec{u}+\vec{v}) + b(\vec{v}+\vec{w}) + c(\vec{w}+\vec{u}) = 5\vec{u} + 3\vec{v} + 4\vec{w}$.

Exercice 12

$ABCD$ est un tétraèdre quelconque. I, J, K, L sont les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Démontre que $IJKL$ est un parallélogramme ; que peut-on en déduire pour les points I, J, K, L ?

Exercice 13

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base. On pose $\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$, $\vec{b} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ et $\vec{c} = 3\vec{u} + \vec{v} + k\vec{w}$. Pour quelle valeur de k les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 14

On donne $A(1\,;\,0\,;\,0)$, $B(0\,;\,2\,;\,0)$ et $C(0\,;\,0\,;\,3)$. a) Écris la condition pour qu'un point $D(x\,;\,y\,;\,z)$ soit dans le plan (ABC). b) Les points $D_1(2\,;\,0\,;\,-3)$ et $D_2(1\,;\,1\,;\,1)$ sont-ils dans ce plan ?

Exercice 15

A, B, C, D sont quatre points de l'espace. a) Montre que le point G défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ vérifie, pour tout point O, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$. b) Calcule G pour $A(1;2;-1)$, $B(3;0;2)$, $C(-2;4;1)$, $D(2;2;2)$.