FONCTIONS DU 2ème DEGRÉ ET OPTIMISATION

Test 5 · Problèmes d'optimisation · CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Les calculs sont détaillés pas à pas. Compare avec ta solution et repère l'étape où tu t'es éloigné(e) du corrigé.

1 Nombres x et y avec $x + y = 40$, donc $y = 40 - x$. Produit $P(x) = x(40 - x) = -x^2 + 40x$. $a < 0$: maximum au sommet, $x_S = -40 / (-2) = 20$, donc $y = 20$. $P(20) = 400$. **Les deux nombres valent 20 et le produit maximal est 400.**

2 $y = x + 8$. $P(x) = x(x + 8) = x^2 + 8x$. $a > 0$: minimum au sommet, $x_S = -8 / 2 = -4$, donc $y = 4$. $P(-4) = 16 - 32 = -16$. **Le produit minimal est −16, avec les nombres −4 et 4.**

3 $y = 20 - x$. $S(x) = x^2 + (20 - x)^2 = 2x^2 - 40x + 400$. $x_S = 40 / 4 = 10$, donc $y = 10$. $S(10) = 200 - 400 + 400 = 200$. **Les deux nombres valent 10 et la somme minimale des carrés est 200.**

4 Le demi-périmètre vaut 18 : longueur x, largeur $18 - x$. $A(x) = x(18 - x) = -x^2 + 18x$. $x_S = 9$, donc largeur 9. $A(9) = 81$. **C'est un carré de 9 m de côté, d'aire 81 m².**

5 x = nombre de francs d'augmentation. Prix : $10 + x$; ventes : $80 - 2x$. Recette $R(x) = (10 + x)(80 - 2x) = -2x^2 + 60x + 800$. $x_S = -60 / (-4) = 15$. Prix = 25 CHF, ventes = $80 - 30 = 50$, $R(15) = 25 \cdot 50 = 1250$. **Prix de 25 CHF, recette maximale de 1250 CHF.**

6 x = nombre d'arbres en plus. Arbres : $40 + x$; rendement : $600 - 10x$. $R(x) = (40 + x)(600 - 10x) = -10x^2 + 200x + 24\,000$. $x_S = -200 / (-20) = 10$. **Il faut planter 50 arbres (10 de plus), pour une récolte de 50·500 = 25 000 kg.**

7 x = hausse en CHF. $R(x) = (10 + x)(200 - 10x) = -10x^2 + 100x + 2000$. $x_S = -100 / (-20) = 5$. **Prix de 15 CHF, 150 spectateurs, recette maximale de 2250 CHF.**

8 $a = 2 > 0$: minimum au sommet. $x_S = 40 / 4 = 10$. $C(10) = 200 - 400 + 500 = 300$. **Il faut produire 10 objets ; le coût minimal est de 300 CHF.**

9 a) $x_S = -60 / (-2) = 30$; $B(30) = -900 + 1800 - 500 = 400$. **Bénéfice maximal de 400 CHF pour 30 articles.**
b) $B(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 60x + 500 = 0$: $\Delta = 3600 - 2000 = 1600$, $x = (60 \pm 40) / 2 \Rightarrow x = 10$ ou $x = 50$. Comme $a < 0$, $B > 0$ **entre 10 et 50 articles** (exclus).

10 Deux côtés de longueur x et un côté de longueur y : $2x + y = 60$, donc $y = 60 - 2x$. $A(x) = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x$. $x_S = 60 / 4 = 15$, donc $y = 30$. $A(15) = 450$. **15 m × 30 m, aire maximale de 450 m².**

11 La clôture comprend 2 longueurs L et 4 largeurs l (2 bords et 2 séparations) : $2L + 4l = 160 \Rightarrow L = 80 - 2l$. Aire $A(l) = l(80 - 2l) = -2l^2 + 80l$. $l_S = -80 / (-4) = 20$, donc $L = 80 - 40 = 40$. $A(20) = 20 \cdot 40 = 800$. **Largeur 20 m, longueur 40 m, aire maximale de 800 m².**

12 MB = 10 − x et BN = x. Aire(MBN) = x(10 − x) / 2 = −½x² + 5x. x_S = −5 / (−1) = 5. Aire = 5·5 / 2 = 12,5. **x = 5 cm, aire maximale de 12,5 cm².**

13 Par Thalès (ou équation de la droite BC) : y = 6 − 0,75x. A(x) = x(6 − 0,75x) = −0,75x² + 6x. x_S = −6 / (−1,5) = 4, donc y = 3. A(4) = 12. **Rectangle de 4 cm × 3 cm, aire maximale de 12 cm².**

14 Le fond mesure 40 − 2x. Section S(x) = x(40 − 2x) = −2x² + 40x. x_S = −40 / (−4) = 10. S(10) = 10·20 = 200. **Hauteur de 10 cm, section maximale de 200 cm².**

15 y = 6 − x. f(x) = x² + (6 − x)² = 2x² − 12x + 36. x_S = 12 / 4 = 3, donc y = 3. f(3) = 18 − 36 + 36 = 18. **Le point (3 ; 3), valeur minimale 18.**